

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

21. Band, Heft 9

7. Februar 1940

S. 385—432

## Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Skolem, Th.:** Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie. *Mh. Math. Phys.* 48, 268—276 (1939).

In dem Buche von Hilbert-Bernays (Grundlagen der Mathematik I. Berlin 1934) wird (S. 343) festgestellt, daß gewisse „erweiterte“ Induktionsschemata auf das einfache (S. 265) durch Anwendung gebundener Variablen zurückführbar sind. Verf. gibt, ohne gebundene Variable zu Hilfe zu nehmen, explizit solche Zurückführungen an für die im obengenannten Buch auf S. 343 und 345 betrachteten erweiterten Schemata. Er verwendet hierbei die Einführung von Funktionen durch Rekursionen, die sich vielleicht nicht mit Hilfe primitiver Rekursionen (S. 326) erklären lassen.

*Hermes (Bonn).*

**Black, M.:** Relations between logical positivism and the Cambridge school of analysis. *J. unified Sci.* 8, 24—35 (1939).

Verf. berichtet über Ausgangspunkte und Zielsetzungen der obengenannten englischen Schule (u. a. G. E. Moore, B. Russell), die den Empirismus nicht so stark betont wie der logische Positivismus (z. B. in der Auffassung der Mathematik), während beiden Richtungen die Ablehnung metaphysischer Spekulationen gemeinsam ist.

*Hermes (Bonn).*

**Reichenbach, Hans:** Über die semantische und die Objekt-Auffassung von Wahrscheinlichkeitsausdrücken. *J. unified Sci.* 8, 50—68 (1939).

Verf. nimmt Stellung gegen verschiedene Einwände, die gegen seine Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl. sein Buch: „Wahrscheinlichkeitslehre“. Leiden 1935) erhoben worden sind. So stellt er fest, daß man seine Theorie sowohl als Objekt- wie auch als (hierzu isomorphe) semantische Theorie der Wahrscheinlichkeit auffassen kann, daß seine Theorie extensional und eine Verallgemeinerung der zweiwertigen Logik ist, und spricht über eine mögliche individuelle Auffassung seiner Auswahloperation, deren Werttafel hierbei jedoch Unbestimmtheiten enthält.

*Hermes (Bonn).*

**Tarski, Alfred:** On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth. *J. Symbolic Logic* 4, 105—112 (1939).

**Mostowski, Andrzej:** Bemerkungen zum Begriff der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit. *J. Symbolic Logic* 4, 113—114 (1939).

Vervollständigung früherer Betrachtungen Tarskis [vgl. insbesondere: *Studia Philosophica* 1 (1936), im folgenden zitiert mit „(T)“]. Sei  $S$  die Klasse der Ausdrücke und  $D$  die der beweisbaren Sätze des Logiksystems  $L$  (ähnlich dem) der *Principia Mathematica*. Sei  $E$  (in diesem ganzen Referat) eine in der Metalogik so definierte Aussagenmenge (also  $E \subset S$ ), daß diese Definition in  $L$  formalisierbar ist. Sei „ $x_{(E)}$ “ die Formalisierung in  $L$  von „ $x \in E$ “.  $E$  heißt inhaltlich widerspruchsfrei (content-consistent), wenn gilt: Aus  $x \in E$  folgt  $\overline{x_{(E)}} \notin E$  und aus  $\overline{x} \in E$  folgt  $x_{(E)} \notin E$ . Unter Zuhilfenahme von Betrachtungen aus (T), S. 370—374, folgt, daß es zu jeder bez. der Abtrennung abgeschlossenen und inhaltlich widerspruchsfreien Menge  $E$  unentscheidbare Sätze gibt. Die Voraussetzungen dieses Satzes lassen sich abschwächen im Falle  $E = D$  und im Falle  $E = D_\Omega$  (kleinstes  $D$  umfassendes System, welches auch bez. der „infiniten Induktion“ abgeschlossen ist). — Verwendet man die starken, nicht in  $L$  formalisierbaren Mittel, mit deren Hilfe Tarski in (T) die Klasse  $Tr$  der wahren Aussagen eingeführt hat, so läßt sich zeigen, daß jede Teilmenge  $E$  von  $Tr$  inhaltlich widerspruchsfrei ist und daß es zu ihr unentscheidbare Sätze gibt. — Zum Schluß gibt T. in großen Zügen einen Beweis des Satzes, daß es in  $L$  für jedes  $\nu > 1$  eine Aus-



sage  $\nu$ -ter Stufe [(T), S. 338] in  $L$  gibt, die keiner Aussage von niedrigerer Stufe äquivalent ist. — Anschließend zeigt Mostowski, daß nur die in  $Tr$  liegenden (den Aussagenkalkül enthaltenden und bez. der Abtrennung abgeschlossenen) Mengen  $E$  bez. jeder ihrer Definitionen inhaltlich widerspruchsfrei sind, ferner, daß jede widerspruchsfreie und (im Gödel-Herbrandschen Sinne) rekursive Menge  $E$  bezüglich wenigstens einer Definition inhaltlich widerspruchsfrei ist. *Hermes (Bonn).*

**Chwistek, L.: A formal proof of Gödel's theorem.** *J. Symbolic Logic* 4, 61—68 (1939).

In dieser Arbeit handelt es sich um den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz [Mh. Math. Phys. 38, 196ff. (1931), vgl. Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik 2, 283—288 (1939)], also um den Satz, der besagt, daß in einem widerspruchsfreien zahlentheoretischen Formalismus  $F$ , der gewisse, jetzt am bequemsten in Hilbert-Bernays 2, 285f. (vgl. die Varianten 288) übersehbare Bedingungen erfüllt, der Satz, der die Behauptung der Widerspruchsfreiheit von  $F$  formalisiert, nicht beweisbar sein kann. Der Beweis dieses Satzes ist hier zum erstenmal formalisiert, und zwar auf der Basis eines von Chwistek mit Unterstützung durch Hetper geschaffenen Formalismus [J. Symbolic Logic 3, 1—36 (1938); dies. Zbl. 18, 337] und zugleich auf der Basis einer angekündigten Vereinfachung dieses Formalismus durch Hetper. — Von den üblichen Konstruktionen eines die Mathematik enthaltenden Logikkalküls unterscheidet das System Chwistek-Hetper sich scharf durch die grundsätzliche Nichtunterscheidung zwischen den verwendeten Zeichen und ihren Bezeichnungen. Hierdurch entstehen Schwierigkeiten, die einer Beurteilung dieses Systems und damit zugleich der hier vorgelegten Formalisierung des Gödelschen Satzes so entgegenstehen, daß diese Schwierigkeiten bis jetzt nicht überwunden sind. Vgl. A. Church, *J. Symbolic Logic* 2, 170 (1937) und W. Quine, ebenda 3, 121 (1938). *Heinrich Scholz (Münster i. W.).*

**Hetper, Władysław: Le calcul des propositions établi sans axiomes.** *Arch. Towarz. nauk.* Lwow 10, Nr 3, 1—8 u. franz. Zusammenfassung 8 (1938) [Polnisch].

$S$  sei eine klammerfreie Symbolik aus abzählbar vielen Aussagenvariablen und der Shefferschen Konstanten („|“),  $H$  bzw.  $H_i$  ein Ausdruck über  $S$ , so daß „ $|H_1 H_2$ “ im Sinne des inhaltlichen Denkens gleichbedeutend ist mit „Es-ist-nicht-wahr-daß  $H_1$  und  $H_2$ “. „ $NH$ “, „ $CH_1 H_2$ “, „ $AH_1 H_2$ “, „ $KH_1 H_2$ “, „ $EH_1 H_2$ “ seien Abkürzungen für „ $HH$ “, „ $|H_1 NH_2$ “, „ $|NH_1 NH_2$ “, „ $N|H_1 H_2$ “, „ $KCH_1 H_2 CH_2 H_1$ “. „ $t_s H$ “, „ $t_s H_1$  seq  $t_s H_2$ “, „ $t_s H_1$  et  $t_s H_2$  seq  $t_s H_3$ “ seien Abkürzungen für „ $H$  ist ein Satz über  $S$ “, „wenn  $t_s H_1$  so  $t_s H_2$ “, „wenn  $t_s H_1$  und wenn  $t_s H_2$ , so  $t_s H_3$ “. — Es wird gezeigt, daß eine Theorie des klassischen Aussagenkalküls (genauer eine Darstellung dieser Theorie über  $S$ ) aufgebaut werden kann mit Hilfe I. des Axiomenschemas  $t_s CHH$ , II. der Umformungsprinzipien

1.  $t_s CH_1 H_2$  seq  $t_s CKH_1 H_3 H_2$ , 5.  $t_s CH_1 NH_2$  et  $t_s CH_1 H_3$  seq  $t_s CH_1 |H_2 H_3$ ,
2.  $t_s CH_1 H_2$  seq  $t_s CKH_3 H_1 H_2$ , 6.  $t_s CH_1 NH_2$  et  $t_s CH_1 NH_3$  seq  $t_s CH_1 |H_2 H_3$ ,
3.  $t_s CH_1 H_2$  et  $t_s CH_1 H_3$  seq  $t_s C_1 H_1 N |H_2 H_3$ , 7.  $t_s CKH_1 H_2 H_3$  et  $t_s CKH_1 NH_2 H_3$  seq  $t_s CH_1 H_3$ ,
4.  $t_s CH_1 H_2$  et  $t_s CH_1 NH_3$  seq  $t_s CH_1 |H_2 H_3$ , 8.  $t_s CH_1 H_2$  et  $t_s H_1$  seq  $t_s H_2$ .

Daß keines dieser Prinzipien entbehrt werden kann, ist nicht gezeigt. — Die vorstehende Konstruktion hat auf Grund von I. eine abzählbare Axiomenmenge zur Voraussetzung. Sie ist also, entgegen der Meinung des Verf., offenbar nicht axiomenfrei. Sie ist auch nicht die erste in ihrer Art. Vgl. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 1938, 25 und G. Gentzen, *Math. Z.* 39, 190ff. (1934) (dies. Zbl. 10, 145).

*Heinrich Scholz (Münster i. W.).*

**Fitch, Frederic B.: Note on modal functions.** *J. Symbolic Logic* 4, 115—116 (1939).

Bemerkungen zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 17, 339), insbesondere Angabe einer einfachen Darstellung des Systems der strict implication von Lewis in einer Booleschen Algebra. *Hermes (Bonn).*



## Algebra und Zahlentheorie.

### Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

**Skolem, Th.:** Eine Bemerkung über gewisse Ringe mit Anwendung auf die Produktzerlegung von Polynomen. Norsk mat. Tidsskr. 21, 99—107 (1939).

Beweis der gewöhnlichen Teilbarkeits- und Primzerlegungssätze in solchen kommutativen Ringen mit Einselement, in denen zwei Nichtnullteiler stets einen größten gemeinsamen Teiler besitzen (diese Voraussetzung ist schwächer als die, daß die endlich-vielgliedrigen Ideale Hauptideale sind) und in denen jeder Nichtnullteiler, der keine Einheit ist, nur begrenzt in Faktoren, die keine Einheiten sind, zerlegbar ist. Als Anwendung ergeben sich in einfacher Weise die bekannten Teilbarkeits- und Zerlegungssätze für die Polynome in  $n$  Veränderlichen über einem Integritätsbereich mit den obigen Eigenschaften.

Reichardt (Leipzig).

**Borůvka, O.:** Studies on multiplicative systems. II. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 265, 1—24 (1938).

The first part was published in the same edition, see this Zbl. 18, 101. Author deals with multiplicative (m.) systems without kernel (w. k.), i. e. with those for any element  $a$  of which there is a positive integer  $\alpha$  such that  $a$  is product of  $\alpha$  but no more than  $\alpha$  elements. Let  $O$  be the family of all finite sequences of elements of any given set  $M$ . Let  $\mathfrak{M}$  be a decomposition of  $O$  into non-void disjoint sets satisfying inter alia (p. 12 above) the following condition: For any ordered pair  $a, b$  of elements of  $\mathfrak{M}$  there is in  $\mathfrak{M}$  just one element  $ab$  (product of  $a$  and  $b$ ) such that the inclusions  $(a_1, \dots, a_\alpha) \in a$ ,  $(b_1, \dots, b_\beta) \in b$ ,  $(a_k, b_k \in M)$  imply  $(a_1, \dots, a_\alpha, b_1, \dots, b_\beta) \in ab$ . Then the "nets"  $\mathfrak{M}$  "realize" the m. systems w. k. Thus dealing with nets author studies the structure of m. systems w. k.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

**Lorenzen, P.:** Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Z. 45, 533—553 (1939).

Eine Menge  $g$ , in der eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, heißt eine Halbgruppe, wenn sie ein Einselement enthält und aus  $ac = bc$  folgt  $a = b$ . Es gibt dann eine Quotientengruppe  $\mathfrak{G}$ . Die multiplikative Idealtheorie, insbesondere die der ganz-abgeschlossenen Ringe, kann auf Halbgruppen übertragen werden; nur tritt an die Stelle des Dedekindschen Idealbegriffes der Prüfersche Begriff eines Idealsystems. Wenn in  $\mathfrak{G}$  jeder endlichen Untermenge  $a$  eine sie umfassende Menge  $a_r$  zugeordnet wird, so daß  $a_r = a g$  und  $a a_r = (a a)_r$  gilt und aus  $a \subseteq b_r$  folgt  $a_r \subseteq b_r$ , so heißt  $a_r$  das aus  $a$  erzeugte endliche  $r$ -Ideal. Die endlichen  $r$ -Ideale bilden das endliche  $r$ -Idealsystem. Ist sogar zu jeder Menge  $a$  ein  $a_r$  mit den obigen Eigenschaften definiert, so hat man ein totales  $r$ -Idealsystem. Eine Reihe von besonderen Idealsystemen (die  $s$ -Ideale,  $v$ -Ideale,  $r_s$ -Ideale,  $r_r$ -Ideale,  $t$ -Ideale,  $d$ -Ideale usw.) werden eingeführt. Untersucht wird, unter welchen Bedingungen die (endlichen oder totalen) Ideale eine Halbgruppe oder eine Gruppe bilden. Auch die Frage der Primidealfaktorzerlegung wird untersucht. Dabei spielt insbesondere die Eigenschaft der  $r$ -Abgeschlossenheit eine Rolle, die besagt,  $c_r : c_r = g$  für jedes endliche  $r$ -Ideal  $c_r$ . Für  $r$ -abgeschlossene Halbgruppen kann man Idealbrüche  $\frac{a}{b}$  definieren; diese bilden eine Gruppe.

Die „ganzen“ Idealbrüche mit  $b \subseteq a$  bilden eine Halbgruppe  $\mathfrak{h}$ , in der je zwei Elemente einen G. G. T. besitzen. Mit Hilfe von  $\mathfrak{h}$  lassen sich Sätze von Krull über Bewertungsringe verallgemeinern und verschärfen, indem die Halbgruppe  $g$  als Durchschnitt von „linearen“ Halbgruppen dargestellt wird, in denen von je zwei Elementen immer eines durch das andere teilbar ist.

van der Waerden (Leipzig).

**Everett jr., C. J.:** Annihilator ideals and representation iteration for abstract rings. Duke math. J. 5, 623—627 (1939).

Jedes Element  $a$  eines Ringes  $\Gamma$  liefert einen Endomorphismus von  $\Gamma$  durch  $b \rightarrow ab$  für  $b \in \Gamma$ . Hieraus entsteht ein Homomorphismus  $a \rightarrow \lambda$  von  $\Gamma$  auf einem



Ring  $L(I')$ , die linke Darstellung, aus Endomorphismen  $\lambda$  von  $I'$ . Ebenso wird die rechte Darstellung  $R(I')$  definiert. Für das Ideal  $(r, l)$  der  $x \in I$  mit  $I'rxI' = 0$  beweist Verf., daß die Iteration von  $r$  rechten und  $l$  linken Darstellungen — unabhängig von der Reihenfolge — einen zu  $I' \bmod (r, l)$  isomorphen Ring ergibt. Für Ringe mit Einselement und für das Zentrum eines Ringes werden speziellere Resultate hergeleitet.

Lorenzen (Bonn).

**Perlis, Sam: Maximal orders in rational cyclic algebras of composite degree.** Trans. Amer. Math. Soc. 46, 82—96 (1939).

Es werden Basen von Maximalordnungen rationaler normaler Divisionsalgebren  $D$  vom Primzahlpotenzgrad  $n = p^m$  angegeben. Die Bestimmung beruht wie bei R. Hull (dies. Zbl. 12, 337) auf der Angabe einer besonders einfachen Darstellung von  $D$  als zyklische Algebra  $(Z, S, \sigma)$ , wobei insbesondere  $\sigma$  eine ganze rationale Zahl sein soll. Ist  $(z_1, \dots, z_n)$  die Hauptordnung von  $Z$  und  $u$  der Operator aus  $D$  mit  $u^{-1}z_iu = z_i^S$ ,  $u^n = \sigma$ , so ist  $(\dots, u^i z_k, \dots)$  eine Ordnung in  $D$ , deren Erweiterungen zu maximalen Ordnungen unter Ausnutzung der speziellen Eigenschaften von  $Z$  und  $\sigma$  studiert werden. Zum Schluß beweist Verf., daß das direkte Produkt von Maximalordnungen zweier normaler einfacher Algebren dann und nur dann eine Maximalordnung der Produktalgebra ist, wenn die Diskriminanten relativ prim sind.

Eichler (Göttingen).

**Schoeneberg, Bruno: Über die  $\zeta$ -Funktion einfacher hyperkomplexer Systeme.** Math. Ann. 117, 85—88 (1939).

Beweis der bekannten Formel, durch die sich die Zetafunktion einer einfachen Algebra mittels der Zetafunktion ihres Zentrums ausdrückt, wenn letzteres ein algebraischer Zahlkörper ist. Im Rahmen einer zusammenfassenden Darstellung der Zahlentheorie der Algebren dürfte sich dieser Beweis von dem Deuring'schen (s. M. Deuring, Erg. d. Math. 4/1, 129—130. Berlin 1935) trotz einer kleinen formalen Abweichung kaum unterscheiden.

Eichler (Göttingen).

### Zahl- und Funktionenkörper:

**Bullig, G.: Zur Zahlentheorie in den total reellen kubischen Körpern.** Math. Z. 45, 511—532 (1939).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 19, 247) stellt der Verf. nun topologische Betrachtungen an. Um ein System von Grundeinheiten in total reellen kubischen Körpern zu erhalten, werden Vektoren betrachtet, die gewisse Minimalbedingungen erfüllen. Zu jedem solchen Vektor werden zwei Nachfolger bestimmt. Die Gesamtheit bildet einen Streckenkomplex, der topologisch untersucht wird. Insbesondere wird gezeigt, daß der Streckenkomplex unter gewissen Bedingungen in die Ebene eingebettet werden kann.

Hofreiter (Wien).

**Nagell, Trygve: Bestimmung des Grades gewisser relativ-algebraischer Zahlen.** Mh. Math. Phys. 48, 61—74 (1939).

Es handelt sich um die Zahlen  $\sqrt[p]{a}$ ,  $\sqrt[p]{a + \sqrt{b}}$  +  $\sqrt[p]{a - \sqrt{b}}$ ,  $\pm \sqrt{\alpha_1} \pm \sqrt{\alpha_2} \pm \sqrt{\alpha_3}$ , wo  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - cx^2 + dx - e$  ist; dabei sind  $c, d, e$  rationale Zahlen.

Eichler (Göttingen).

**Blichfeldt, H. F.: Note on the minimum value of the discriminant of an algebraic field.** Mh. Math. Phys. 48, 531—533 (1939).

Es sei  $n$  eine genügend große, ganze, rationale Zahl,  $D_n$  die Diskriminante eines algebraischen Körpers  $n$ -ten Grades, dessen konjugierte Körper sämtlich reell sind. Der Verf. beweist:  $\sqrt[n]{D_n} \geq 2\pi e^{3/2}$ .

VI. Knichal (Prag).

**Dribin, D. M.: Class field theory of solvable algebraic number fields.** Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 289—290 (1939).

Es sei  $k$  ein endlicher Zahlkörper und  $K/k$  eine endliche auflösbare Erweiterung von  $k$ . Es bezeichne ferner  $\Pi(K/k)$  die Menge aller in  $K$  vollzerlegten Primideale von  $k$ . Es wird ohne Beweis eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben,



daß einer vorgegebenen Menge  $\Pi$  von Primidealen aus  $k$  mit der Dichtigkeit  $\frac{1}{n}$  eine auflösbare Erweiterung  $K/k$  vom Grade  $n$  entspricht derart, daß  $\Pi(K/k) \supseteq \Pi$  und daß die Dichtigkeit von  $\Pi(K/k) - \Pi$  Null sei. Ferner wird behauptet, daß man hierbei eine Verallgemeinerung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes erhalten kann. C. Arf.

**Aramata, Hideo:** Über die Eindeutigkeit der Artinschen  $L$ -Funktionen. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 124—126 (1939).

$\mathfrak{G}$  sei isomorph zu der binären inhomogenen Modulargruppe der Primzahlstufe  $p$ ,  $k$  ein algebraischer Zahlkörper und  $K$  eine galoissche Erweiterung von  $K$  mit der Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Dann sind die zu  $K/k$  gehörigen Artinschen  $L$ -Funktionen eindeutig. Das funktionentheoretische Problem ist bekanntlich mit einem Problem über die Darstellungen von  $\mathfrak{G}$  äquivalent, und dieses wird unter engem Anschluß an eine Arbeit von G. Frobenius (S.-B. preuß Akad. Wiss. 1896, 985—1021) gelöst. Eichler.

**Hecke, E.:** Die Klassenzahl imaginär-quadratischer Körper in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Mh. Math. Phys. 48, 75—83 (1939).

Mehrere Untersuchungen [Hecke, Math. Z. 28 (1928); Abh. math. Semin. Hamburg Univ. 8 (1930); F. Spies, dies. Zbl. 12, 101] zeigten einen Zusammenhang zwischen Konstanten der Funktionen  $q$ -ter Stufe mit dem Körper  $K(\sqrt{-q})$ . Diese weiterführende Arbeit gebraucht die gleichen Bezeichnungen wie die früheren (E. Hecke, dies. Zbl. 15, 402; 16, 355). Die Ableitungen der  $p_0(q)$  Integrale 1. Gattung ( $q$  Primzahl) zur Gruppe  $\Gamma_0(q) \begin{pmatrix} a & b \\ c \equiv 0(q) & d \end{pmatrix}$  nach  $\tau$  sind die Spitzenformen zu  $\Gamma_0(q)$  von der Dimension  $-2$ ,  $f^{(\nu)}(\tau)$  ( $\nu = 1, \dots, p_0$ ).! Mittels der linearen Operatoren  $T_n$  und  $T_m^q$  zur  $q$ -ten Stufe konstruiert man daraus vertauschbare Matrizen des Grades  $p_0$ :  $B^1, \dots, B^{p_0}$ , daß die Matrix  $B(\tau) = \sum_{\nu=1}^{p_0} f^{(\nu)}(\tau) B^\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m) e^{2\pi i m \tau}$  das Koeffizientengesetz  $\lambda(m_1) \lambda(m_2) = \sum_{d|m_1, m_2} \lambda\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) d$  ( $d \not\equiv 0 \pmod{q}$ ) hat. Dann sind die charakteristischen Wurzeln von

$\lambda_q$  nur  $\pm 1$ , und die Spur von  $\lambda(q)$  drückt sich für  $q \geq 5$  einfach durch die Klassenzahl mit der Diskriminante  $-4q$  aus. Für das volle System der  $\kappa$  Spitzenformen  $f^e$  zu  $\Gamma_0(q)$  von der Dimension  $-k$  mit geradem  $k < 12$  oder  $k = 14$  hat die Matrix  $\lambda(q)$ , definiert durch  $f^e/T_q = \sum_{\sigma=1}^{\kappa} \lambda_{e\sigma}(q) f^\sigma$ ,  $\lambda(q) = (\lambda_{e\sigma}(q))$ , die Eigenschaft, daß  $\left(1 - \frac{k}{2} \lambda(q)\right)^2$

Einheitsmatrix vom Grade  $\kappa$  ist. Daraus folgt: Die Anzahl der negativen charakteristischen Wurzeln von  $\lambda(q)$  ist für  $k < 12$  oder  $k = 14$  gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spitzenformen der Dimension  $-k$ , die bei  $\Gamma^{*}(q)$  invariant bleiben.

( $\Gamma^{*}(q)$  wird aus  $\Gamma_0(q)$  durch Hinzunahme von  $\begin{pmatrix} \sigma & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$  erzeugt.) Die genannte Anzahl läßt sich in einfacher Weise durch  $k$  und  $q$  ausdrücken. Für  $q \geq 5$  definiert der Operator  $T_q^q$  zu dem vollen System der Spitzenformen der Gruppe  $\Gamma_0(q)$  der Dimension  $-k$  eine Matrix  $\lambda_q$ , deren Grad und Spur für gerades  $k < 12$  und  $k = 14$  bestimmte Ausdrücke in  $k$  und  $q$  sind, in die die Klassenzahl des Körpers  $K(\sqrt{-q})$  eingeht.

Th. Schneider (Göttingen).

**Mac Lane, Saunders:** Steinitz field towers for modular fields. Trans. Amer. Math. Soc. 46, 23—45 (1939).

Die Arbeit befaßt sich im Anschluß an einen von H. Hasse und F. K. Schmidt ohne Beweis behaupteten Satz mit der Frage, wieweit sich die inseparablen algebraischen Erweiterungen vermeiden lassen, wenn man einen beliebigen Körper  $K$  von Primzahlencharakteristik über seinem Primkörper oder allgemeiner über irgendeinem vollkommenen Unterkörper  $k$  aufbaut. Zunächst beweist sie die Behauptung, daß es zwischen  $k$  und  $K$  stets einen separablen (d. h. durch transzendente und separabel algebraische Erweiterungen bildbaren) Zwischenkörper  $L$  gibt, über dem  $K$  relativ vollkommen ist.



Dabei wird  $K$  relativ vollkommen über  $L$  genannt, wenn  $K$  bereits durch Adjunktion der vollkommenen Hülle  $L^{p-\infty}$  von  $L$  vollkommen wird,  $K^{p-\infty} = KL^{p-\infty}$ .  $K$  ist über  $L$  niemals separabel. Ist also  $T$  eine beliebige Transzendenzbasis von  $K/L$  und

$$(S) \quad L(T) \subseteq K^{(0)} \subseteq K^{(1)} \subseteq \dots \subseteq K^{(n)} \subseteq \dots \subseteq K$$

der Steinitzsche Körperturm von  $K/L(T)$ , wo  $K^{(n)}$  den Körper aller Elemente von höchstens  $n$ -tem Exponenten über  $L(T)$  bedeutet, so bricht dieser Turm für keine Transzendenzbasis  $T$  mit  $K^{(0)} = K$  ab.  $T = T^{(0)}$  ist mithin bloß für  $K^{(0)}/L$  eine separierende Transzendenzbasis, nicht aber für die Körper  $K^{(n)}/L$  mit  $n > 0$ . Es wird nun weiter die Frage untersucht, ob jeder der Körper  $K^{(n)}/L$  eine individuelle separierende Transzendenzbasis  $T^{(n)}$  besitzt. Falls  $K/L$  von endlichem Transzendenzgrad ist, ist dies tatsächlich stets der Fall. Ist dagegen  $K/L$  von unendlichem Transzendenzgrad, so trifft dies für den zu einer beliebigen Transzendenzbasis  $T$  gehörigen Steinitzschen Körperturm (S) nicht zu, wie an einem Beispiel dargetan wird. — Die in der Arbeit von H. Hasse und F. K. Schmidt behauptete Existenz separierbarer Steinitzscher Körpertürme von  $K/L$  ist also jedenfalls dahin einzuschränken, daß die Transzendenzbasis  $T$  von  $K/L$  zunächst geeignet gewählt werden muß. Ob die Behauptung mit dieser Einschränkung richtig ist, bleibt in der vorliegenden Arbeit offen, wird aber in einer demnächst erscheinenden gemeinsamen Note des Verf. und Ref. bestätigt, womit der früher benutzte Satz in ausreichendem Umfang gesichert ist.

F. K. Schmidt (Jena).

**Moriya, Mikao:** Über die Divisorenklassen nullten Grades in einem abstrakten elliptischen Funktionenkörper. J. reine angew. Math. 181, 61—67 (1939).

Ref. hat in einer früheren Arbeit die Anzahl der Divisorenklassen vom Exponenten  $n$  in einem algebraischen Funktionenkörper vom Geschlecht 1 über einem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik durch ein rechnerisches Verfahren genau bestimmt (vgl. dies. Zbl. 14, 149). Verf. gibt einen weiteren Beweis für diese Anzahlformeln für den Spezialfall eines absolut-algebraischen algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörpers von Primzahlcharakteristik. Dieser Beweis stützt sich weitgehend auf die Klassenkörpertheorie. — Ref. ergänzt, daß die in Rede stehenden Anzahlformeln sich neuerdings auf Grund einiger Bemerkungen von Deuring ganz einfach und ohne jede Rechnung aus der Theorie der Korrespondenzen ablesen lassen.

H. Hasse (Göttingen).

### Zahlentheorie:

**Gupta, Hansraj:** Another generalization of Leudesdorf's theorem. J. London Math. Soc. 41, 86—88 (1939).

Es bedeute  $S'(n, r)$  ( $n > 2$ ) die Summe der  $r$ -ten Potenzen der  $\varphi(n)$  zu  $n$  primen natürlichen Zahlen  $< n$ . Nachdem Verf. den Satz von Leudesdorf  $S'(n, \varphi(n) - 1) \equiv 0 \pmod{n^2}$  [ $(n, 6) = 1$ ] in zwei früheren Arbeiten (s. dies. Zbl. 12, 10; 19, 50) verallgemeinert hat, erweitert er auf sie gestützt die bisherigen Resultate durch  $kS'(n, 2j + 1) \equiv 0 \pmod{n^2}$  ( $j > 0$ ), wobei  $k \mid 2(n, N_{2j})$  und  $N_{2j}$  das Produkt derjenigen verschiedenen Primzahlen ist, für die  $p - 1 \mid 2j$  gilt. Es wird auch ein besseres  $k$  angegeben, doch ergibt sich daraus für den Leudesdorfschen Fall ( $(n, 6) = 1$ ,  $2j + 1 = \varphi(n) - 1$ )  $k = 1$  im allgemeinen nicht.

L. Rédei (Budapest).

**Vandiver, H. S.:** Certain congruences involving the Bernoulli numbers. Duke math. J. 5, 548—551 (1939).

In der Kummerschen Kongruenz (1)  $h^n(h^{p-1} - 1)^j \equiv 0 \pmod{p^j}$  [ $0 \leq j < n$ ,  $p$  ungerade Primzahl, links ist  $h^t = b_t/t$  zu setzen, die Bernoullische Zahl  $b_t$  definiert durch  $(b + 1)^n = b^n$ ,  $n > 1$ ,  $b^t = b_t$  gesetzt] ist  $n$  durch  $p - 1 \nmid n$  eingeschränkt. Verf. füllt diese Lücke durch (2)  $b^a(b^{p-1} - 1)^j \equiv 0 \pmod{p^{j-1}}$  aus ( $a > 0$ ,  $j > 0$ ,  $a + j < p - 1$ ). Er beweist (2) mit in einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 17, 100) entwickelten Mitteln, durch die er dort auch für (1) einen neuen Beweis gegeben hat. Die Verschiedenheit der Moduli in (1) und (2) ist insofern nur scheinbar, als nach dem



Satz von Staudt-Clausen in (1) lauter mod  $p$  ganze Zahlen vorkommen, während etwas Ähnliches über (2) erst nach Multiplizieren durch  $p$  gilt. *L. Rédei.*

**Rosser, Barkley:** On the first case of Fermat's last theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 636—640 (1939).

Bekanntlich ist  $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$  für  $m = 2, 3, \dots, 31$ , wenn  $x^p + y^p + z^p = 0$ ,  $(p, xyz) = 1$  und  $p$  eine Primzahl. Die Kongruenz hat  $(p-1):2$  Lösungen  $< p^2:2$ . Ist daher  $\Phi_n(N)$  die Anzahl der Zahlen  $\leq N$ , die keinen Primfaktor  $> p_n$  (die  $n$ -te Primzahl) haben, so ist  $\Phi_{11}(\frac{1}{2}p^2) \leq \frac{1}{2}(p-1)$ . Um eine niedrigere obere Grenze für  $\Phi_{11}$  zu gewinnen, wird ein Polynom  $f_n(x)$  definiert durch die Rekursion:

$$f_1(x) = \frac{x}{\log 2}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{\log p_{n+1}} \int_0^x f_n(y) dy + \frac{1}{2} f_n(x);$$

dann gilt:  $\Phi_n(x) > f_n(\log x)$  und die Koeffizienten von  $f_{11}(x)$  werden in 10 Dezimalstellen berechnet. Endlich wird berechnet, daß  $p > 8332403$  ist. *N. G. W. H. Beeger.*

**Dickson, L. E.:** All integers except 23 and 239 are sums of eight cubes. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 588—591 (1939).

Verf. teilt mit, daß er bewiesen hat (wie in W. S. Baer, Beiträge zum Waringschen Problem. Göttingen: Diss. 1913), daß jede Zahl  $> 233^6 \cdot 14,002 \dots$  Summe von höchstens 8 positiven Kuben ist, und daß er Tabellen berechnet hat, woraus sich ergibt, daß dieser Satz auch für jede kleinere Zahl zutrifft, mit Ausnahme von 23 und 239.

*N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).*

**Vinogradov, I. M.:** A new improvement of the method of estimation of trigonometrical sums with primes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 59 (1939).

**Corput, J. G. van der:** Une inégalité relative aux sommes de Weyl. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 461—467 (1939).

Es wird bewiesen: Zu jedem  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$  und jedem ganzen  $n > 1$  gibt es ein  $c$  so, daß für jedes Polynom  $f(y)$  vom Grade  $n$  mit reellen Koeffizienten und dem höchsten Koeffizienten  $\frac{\alpha}{n!}$ , jedes ganze  $P$ , jedes ganze  $X \geq 2$ , jedes  $\tau \geq 1$  und jedes Paar teilerfremder ganzer Zahlen  $a, q$  mit  $q > 0$ ,  $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$

$$|S|^{2^{n-1}} < c \log^\sigma X \cdot \left( \tau + \frac{q}{X} \right)^{1-\varepsilon} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{X^{n-1}} \right)^{1-\varepsilon} \quad (1)$$

ist, wo  $S = X^{-1} \sum_{y=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(y)}$ ,  $\sigma = \frac{(n-1)! - 1}{l}$  mit  $l = - \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \right]$  gesetzt ist. Dieser

Satz enthält die ältere Abschätzung

$$|S|^{2^{n-1}} < c_1 X^\varepsilon \left( \tau + \frac{q \log q}{X} \right) \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{X^{n-1}} \right), \quad (2)$$

in der  $c_1$  ebenfalls nur von  $\varepsilon$  und  $n$  abhängt, liefert aber im Gegensatz zu dieser bei beschränktem  $\tau$  auch dann noch für die additive Theorie der Primzahlen brauchbare Ergebnisse, wenn man, wie es dort üblich ist,  $q$  bei wachsendem  $X$  mindestens wie  $\log^2 X$  wachsen läßt, wo  $\Omega > 0$  fest ist. Es wird dann

$$|S|^{2^{n-1}} < c_2 \log^{\sigma - (1-\varepsilon)\Omega} X,$$

wo  $c_2$  nur von  $\varepsilon, n$  und  $\Omega$  abhängt. Hieraus folgt wieder, daß es zu jedem ganzen  $n > 1$  und jedem  $\Omega_1$  ein  $c_3$  mit

$$|S| < c_3 \log^{-\Omega_1} X \quad (3)$$

gibt; man braucht nur  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , also  $\sigma = \frac{1}{2}n^2 - n$ , und  $\Omega = 2\sigma + 2^n \Omega_1$  zu setzen. Unter dieser Voraussetzung strebt also die rechte Seite von (1) bei wachsendem  $X$  gegen 0, während die rechte Seite von (2) im selben Falle noch über alle Grenzen wachsen kann. (3) allein folgt auch aus einem Satz von Vinogradoff [Travaux de l'Institut mathématique de Tbilissi 3, 35—67 (1938); dort S. 36, Hilfssatz 2; dies. Zbl. 18, 52].

*W. Weber (Berlin).*

Rankin, R. A.: Contributions to the theory of Ramanujan's function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$  on the line  $\Re s = \frac{13}{2}$ . Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 351—356 (1939).

Rankin, R. A.: Contributions to the theory of Ramanujan's function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 357—372 (1939).

Der Koeffizient  $\tau(n)$  bei der Fourierentwicklung der Diskriminante

$$\Delta(\tau) = e^{2\pi i \tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n \tau}$$

heißt die Ramanujansche Funktion (Ramanujan, Collected Papers 136—162). Nach Hardy [Proc. Cambridge Philos. Soc. 23, 675—680 (1927)] gibt es zwei pos. Konstanten  $A, B$  derart, daß für  $n \geq 1$

$$A n^{12} \leq \tau^2(1) + \tau^2(2) + \dots + \tau^2(n) \leq B n^{12}.$$

Die Reihe  $g(s) = \sum \tau(n) n^{-s}$  konvergiert also für  $\sigma > \frac{13}{2}$  absolut, und es ergibt sich aus der Transformationsformel von  $\Delta(\tau)$ , daß  $g(s)$  eine ganze Funktion darstellt, die für  $\sigma > \frac{13}{2}$  nicht verschwindet. Verf. zeigt in der ersten Arbeit, mit der bekannten Methode der Primzahltheorie, daß  $g(s)$  sogar auf der Geraden  $\sigma = \frac{13}{2}$  keine Wurzeln besitzt. In der zweiten Arbeit betrachtet Verf. diejenige ganze Modulform  $H(\tau)$   $N$ -ter Stufe der Dimension  $-\kappa$  ( $\kappa \geq 1$ ), die in allen rationalen Spitzen verschwindet (Spitzenform) und eine für  $\Im(\tau) > 0$  absolut konvergente Fourierentwicklung besitzt:

$$H(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}}.$$

Bewiesen wird die Abschätzung

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = \alpha n^{\kappa} + O(n^{\kappa - \frac{1}{2}}),$$

wobei  $\alpha$  eine durch  $H(\tau)$  bestimmte pos. Konstante bedeutet. Für  $\Delta(\tau)$  ist dies natürlich eine Verschärfung des am Anfang erwähnten Hardyschen Ergebnisses ( $\kappa = 12$ ). Beim Beweise für  $N = 1$  spielt die Dirichletreihe  $\sum |a_n|^2 n^{-s}$  die Hauptrolle. Im allgemeinen kommt dabei ein System von ähnlichen Dirichletreihen zur Verwendung. Die genannte Abschätzung ergibt sich aus dem bekannten 5 Seiten langen Satz von Landau (Gött. Nachr. 1915, 209—243). Aus dieser Abschätzung folgt

$$a_n = O\left(n^{\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{5}}\right),$$

eine Verschärfung des Resultates von Salié und Davenport (dies. Zbl. 5, 162—163; 6, 295).

Z. Suetuna (Tokyo).

Corput, J. G. van der, et Ch. Pisot: Sur un problème de Waring généralisé. III. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 566—572 (1939).

Wie in I und II (dies. Zbl. 21, 297) wird nach Lösungen des Systems diophantischer Gleichungen

$$t_{\mu} = \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} f_{\nu}(y_{\nu}) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

unter den Nebenbedingungen  $|f_{\nu}(y_{\nu})| \leq X$  gefragt. Zusätzlich wird aber für eine Teilmenge der Werte  $\nu = 1, \dots, n$   $y_{\nu} \equiv a_{\nu} \pmod{A_{\nu}}$

gefordert, wo  $a_{\nu}, A_{\nu}$  jeweils gegebene teilerfremde ganze Zahlen sind; zugleich sollen die diesen  $\nu$  entsprechenden  $y_{\nu}$  Primzahlen sein. Unter gewissen Voraussetzungen über die Matrizen  $(b_{\mu\nu})$  und  $(b_{\mu\nu} f_{\nu})$  — wobei insbesondere die ausgewählte Teilmenge der  $\nu$  eine entscheidende Rolle spielt — übertragen sich die früheren Ergebnisse sinngemäß auf den jetzigen Fall.

W. Weber (Berlin).



## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Dieudonné, Jean:** Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 145—147 (1939).

Pour une espace métrique  $E$  la propriété d'être complet peut être énoncée comme suit: (C)  $F$  parcourant une famille monotone d'ensembles fermés telle que tout entourage de la diagonale dans  $E \times E$  en contient un  $F \times F$ , la partie commune des  $F$  est non vide. La note contient au fond le résultat suivant (s'appuyant sur un raisonnement d'Aronszajn): L'espace ordonné des nombres ordinaux de seconde classe, soit  $E$ , ne jouit pas de la propriété (C); pour les  $F$  on peut prendre les ensembles  $F = F_\alpha = E_\xi$  ( $\xi \geq \alpha$ ).

$E$  est un espace complètement normal localement (bi-) compact. *Bedřich Pospíšil*.

**Otchan, G.:** Sur l'équivalence des familles d'ensembles mesurables B. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 753—755 (1939).

Sei ein vollständiger metrischer Raum mit einer abzählbaren Basis gegeben. Zwei Mengenklassen des Raumes sind äquivalent, falls es eine Abbildung des Raumes auf sich selbst gibt, die jede der beiden Klassen in die andere ein-eindeutig überführt. Verf. zeigt u. a., daß die Mengenkasse aller Borelschen Mengen  $F^\xi$  (bzw.  $G^\xi$ ) mit keiner Klasse kleinerer Ordnung äquivalent ist. Eine ähnliche Behauptung gibt Verf. auch für die Klasse aller Borelschen Mengen, aller  $A$ -Mengen und aller  $CA$ -Mengen; namentlich ist keine dieser Klassen mit einem ihrer echten Teile im obigen Sinne äquivalent.

*L. Egyed* (Budapest).

**Novikoff, P.:** Sur les projections de certains ensembles mesurables B. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 864—865 (1939).

Die Note enthält folgende Behauptung: Ist  $E$  eine  $B$ -meßbare ebene Menge, und  $M$  die lineare Menge aller  $x_0$  Koordinaten, für die die Gerade  $x = x_0$   $E$  in einer abgeschlossenen Menge schneidet, so ist  $M$  eine  $B$ -meßbare Menge. *L. Egyed*.

**Kondô, Motokiti:** Sur une extension de la théorie des fonctions de Baire. Proc. Imp. Acad. Jap. **15**, 200—206 (1939).

**Cesari, Lamberto:** Sul teorema di densità in senso forte. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **8**, 301—307 (1939).

Aus einem bekannten Egoroff'schen Satze wird folgendes Lemma abgeleitet: Sind  $\varphi(x)$ ,  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) in  $(a, b)$  summierbare Funktionen und ist fast überall  $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , so gibt es, bei willkürlich positivem  $\varepsilon$ , in fast jedem Punkte  $x_0$  von  $(a, b)$  ein  $h_0 > 0$  und eine natürliche Zahl  $n_0$  derart, daß aus  $0 < h < h_0$ ,  $n \geq n_0$  folgt

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f_n(x) dx - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Mittels dieses Lemmas lassen sich in sehr einfacher Weise die beiden von Saks und von Jessen, Marcinkiewicz und Zygmund herrührenden Sätze beweisen: I. In fast allen Punkten einer ebenen Punktmenge  $E$  ist die mittels achsenparalleler Rechtecke definierte Dichte von  $E$  gleich 1; II. sind  $f(x, y)$  und  $f(x, y) \log |f(x, y)|$  im achsenparallelen Rechteck  $R$  summierbar, so hat die Intervallfunktion  $\iint_R f(x, y) dx dy$

in fast allen Punkten von  $R$  eine mittels achsenparalleler Rechtecke definierte Ableitung gleich  $f(x, y)$ . Eine Konstruktion von (Bohr und Saks) führt zu der folgenden Erweiterung eines Resultates von Saks: Zu jeder nicht abnehmenden, für  $t > 0$  positiven Funktion  $\alpha(t)$ , mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$ , gibt es eine im Rechteck  $R$  summierbare Funktion  $f(x, y)$ , für die in jedem Punkte  $(x, y)$  von  $R$

$$\lim_{\delta(t)} \frac{1}{|I|} \iint_I f(\xi, \eta) d\xi d\eta = +\infty$$



ist; hierbei ist  $\delta$  der Diameter,  $(x, y)$  der Mittelpunkt von  $I$  und für die Seitenlängen  $h$  und  $k$  von  $I$  gilt:  $h \geq k \alpha(k)$ ,  $k \geq h \alpha(h)$ . J. Ridder (Groningen).

Izumi, Shin-ichi: On the compactness of a class of functions. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 111—113 (1939).

Es sei  $R$  die Menge aller, in einem endlichen Intervall  $(a, b)$  definierten eindeutigen, reellen Funktionen  $f(x)$  der reellen Veränderlichen  $x$ . Es sei  $C$  bzw.  $S$  der Raum aller stetigen bzw. endlichen und meßbaren Funktionen aus  $R$  mit der Metrik  $\|f\| = \max_{x \in (a, b)} |f(x)|$

bzw.  $\|f\| = \int_a^b \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|} dt$ . Ziel der Note ist die Aufstellung von notwendigen und zugleich

hinreichenden Bedingungen für Kompaktheit von Teilmengen  $\mathfrak{F}_C$  bzw.  $\mathfrak{F}_S$  aus  $C$  bzw.  $S$ , und zwar von Bedingungen, die den Kolmogoroffschen für die Klasse  $L^{(p)}$ ,  $p \geq 1$  nachgebildet sind [Kolmogoroff, Göttinger Nachr. 1931; dies. Zbl. 2, 385 sowie auch Takahashi, Studia Math. 5 (1935); dies. Zbl. 13, 65]. Die gewünschten Bedingungen lauten: Für  $\mathfrak{F}_C$ : Es ist  $\mathfrak{F}_C$  beschränkt und es ist für alle  $x \in (a, b)$  und alle

$f \in \mathfrak{F}_C$  (gleichmäßig)  $f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(x)$ , wobei  $f_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f(x+t) dt$ . — Für  $\mathfrak{F}_S$ : Zu

jedem  $\delta > 0$ ,  $N > 0$  existiert ein  $M > 0$  mit  $|(f^N)_\delta| \leq M$  für alle  $x \in (a, b)$  und alle  $f \in \mathfrak{F}_S$  (in der Note steht, wohl versehentlich,  $\mathfrak{F}_m$ ): dabei soll sein  $f^N = f(x)$  für  $|f(x)| \leq N$  und  $f^N = 0$  für  $|f(x)| > N$ . Zu jedem  $\eta > 0$  existiert ein  $N_0$  mit  $\|f - f^N\| \leq \eta$  für alle  $N \geq N_0$  (in der Note steht, wohl versehentlich,  $f_\delta^N$  statt  $f^N$  und  $N \geq N_1$ ). Zu jedem  $\eta > 0$  existiert ein  $N_1$  und  $\delta_1$  mit  $\|f - (f^N)_\delta\| \leq \eta$  für  $N \geq N_1$ ,  $\delta \leq \delta_1$ . — Der Beweis für  $\mathfrak{F}_C$  wird gegeben, der für  $\mathfrak{F}_S$  nur angedeutet. Haupt (Erlangen).

Bruwier, L.: Sur les suites de fonctions également continues à l'infini. C. R. Inst. Sci. Roum. 3, 393—396 (1939).

Die reellen Funktionen  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , mit  $x_0 \leq x$  als Definitionsbereich werden als gleichmäßig stetig in  $x = +\infty$  bezeichnet, wenn  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = c_n$  (existiert und) endlich ist und wenn  $|u_n(x) - c_n| < \varepsilon$  für  $x > Q(\varepsilon)$  mit von  $n$  unabhängigem  $Q$ . Gezeigt wird, daß aus der Voraussetzung gleichmäßiger Stetigkeit in  $x = +\infty$  und der Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$  für alle  $x \geq x_0$  die Existenz, Endlichkeit und Gleichheit der iterierten und des totalen Limes folgt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} u_n(x).$$

Der Satz ist Spezialfall eines bekannten, wesentlich allgemeineren und noch etwas schärferen Satzes (vgl. Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung. Berlin: W. de Gruyter u. Co. 1938. 1. Bd., S. 169). Haupt (Erlangen).

Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. (VI.) Rev. math. Union Interbalkan. 2, Fasc. 3/4, 31—40 (1939).

Cette note contient plusieurs conditions (nécessaires et) suffisantes pour qu'une fonction  $f(x)$  définie et continue sur un ensemble fermé et borné  $E$  ou sur un segment  $[a, b]$  soit non-concave ou non-convexe d'ordre  $n$  sur  $E$  resp. sur  $[a, b]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Dans le cas d'un ensemble fermé  $E$  nous nommons comme exemple des conditions pour la non-concavité d'ordre  $n$  la suivante: Quels que soient le polynôme  $P(x)$  de degré  $n$  et la section  $E_1$  de  $E$ , l'ensemble  $E_1(M)$  des points de  $E_1$  dans lesquels  $f - P$  atteint son maximum sur  $E_1$ , ne peut être formé par au moins  $n - k + 1$  sections, séparées par des sous-ensembles non vides de  $E_1$ , sans contenir l'une des extrémités (droite ou gauche) de  $E_1$  pour  $n$  impair et l'extrémité droite pour  $n$  pair ( $k = \frac{n}{2}$  ou  $\frac{n+1}{2}$  suivant que  $n$  est pair ou impair). Dans le cas d'un segment  $[a, b]$  on a e. a. comme condition (nécessaire et) suffisante pour la convexité ou concavité d'ordre  $n$  dans  $[a, b]$ : Quel que soit le sous segment  $[a_1, b_1]$  de  $[a, b]$ , le polynôme de Tchebycheff de degré  $n + 1$



de  $f$  dans  $[a_1, b_1]$  est „effectivement“ de degré  $n + 1$ . Cf. Popoviciu, Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 20; ce Zbl. 21, 116. J. Ridder (Groningen).

## Analysis.

### Allgemeines:

Pietra, Gaetano: Di una formula per il calcolo delle medie combinatorie. (27. riun., Bologna, 4.—11. IX. 1938.) Atti Soc. ital. Progr. Sci. 5, 38—45 (1939).

Erdős, P., and T. Grünwald: On polynomials with only real roots. Ann. of Math., II. s. 40, 537—548 (1939).

Es seien  $a$  und  $b$  ( $a < b$ ) zwei aufeinanderfolgende Nullstellen des Polynoms  $f(x)$  mit reellen Koeffizienten und mit lauter reellen Nullstellen, und es sei  $f(x)$  auf der Strecke  $(a, b)$  positiv. Bezeichnet  $I_3$  den Inhalt des Dreieckes mit der Grundlinie  $(a, b)$ , dessen andere zwei Seiten die Kurve  $y = f(x)$  in den Endpunkten der Strecke  $(a, b)$  berühren, und bedeutet  $I_4$  den Inhalt des Rechteckes mit der Grundlinie  $(a, b)$ , dessen Höhe das Maximum von  $f(x)$  auf der Strecke  $(a, b)$  ist, so gilt die Ungleichung

$$I_3 \leq \frac{3}{2} \int_a^b f(x) dx \leq I_4.$$

Gleichheit besteht hier nur dann, wenn  $f(x)$  vom zweiten Grade ist. — Ist  $h_3$  bzw.  $h_4$  die Höhe des genannten Dreieckes bzw. Rechteckes in bezug auf die gemeinsame Grundlinie  $(a, b)$ , so folgt aus dem vorigen Satz die folgende, den Verff. mündlich mitgeteilte Ungleichung von G. Szekeres:  $h_3 \leq 2h_4$ . Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Collins, J. J.: Upper limits to the real roots of a real algebraic equation. Amer. Math. Monthly 46, 334—338 (1939).

Es sei  $a_k$  der erste negative Koeffizient in der Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_n = 0$$

mit reellen Koeffizienten, und es sei  $M$  der absolute Betrag der absolut größten negativen Koeffizienten von  $f(x)$ . Besteht für eine Zahl  $h \geq 1$  die Ungleichung

$$K = M - (h-1) \sum_{s=0}^{k-1} a_s h^{k-1-s} > 0,$$

so ist  $H_1 = 1 + \sqrt[k]{K + (h-1)^k}$  eine obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$ . Ist  $H_2 = 1 + \sqrt[k]{M - \sum_{s=0}^{k-1} a_s} > 2$ , so ist auch  $H_2$  eine obere Grenze der positiven Nullstellen von  $f(x)$ . Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Turan, P.: Über die Ableitung von Polynomen. Compositio Math. 7, 89—95 (1939).

Les résultats de A. Markoff, M. Riesz, G. Szegő ont pour but de trouver, dans certains cas, une limitation supérieur du rapport

$$\max_{|z| \in D} |f'(z)| : \max_{(D)} |f(z)|, \quad (*)$$

$D$  étant un certain domaine de la variable complexe  $z$  et  $f(z)$  un polynome de degré  $n$ . L'aut. se propose de déterminer le minimum de (\*) lorsque les zéros de  $f(z)$  appartiennent à  $D$  et trouve les résultats suivants: 1° Lorsque  $D$  est le cercle unité  $|z| \leq 1$ , le minimum est égal à  $\frac{n}{2}$ . 2° Lorsque  $D$  est l'intervalle fermé  $(-1, 1)$  le minimum est  $\geq \frac{\sqrt{n}}{6}$ .

T. Popoviciu (Cernăuți).

Erőd, Johann: Über die untere Grenze des Maximums von gewissen Polynomen. Mat. fiz. Lap. 46, 58—82 u. dtsch. Zusammenfassung 83 (1939) [Ungarisch].

Soit  $f(z)$  un polynome de degré  $n$  dont les zéros appartiennent à un domaine  $D$ . L'aut., en complétant certains résultats de P. Turan (voir le ref. précédent), se



propose de déterminer le minimum du rapport

$$\max_{(D)} |f'(z)| : \max_{(D)} |f(z)|$$

et obtient les résultats suivants: 1° Si  $D$  est l'intervalle fermé  $(-1, 1)$ , le minimum

est  $\frac{n}{2}$  pour  $n = 2, 3$ ,  $\frac{n}{\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}}$  pour  $n$  pair  $\geq 4$  et

$$\frac{n^2}{(n-1)\sqrt{n+1}} \left(1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

pour  $n$  impair  $\geq 5$ . 2° Si  $D$  est un domaine fermé limité par l'ellipse d'axes  $(-1, 1)$ ,

$(-ai, ai)$ , le minimum est  $\geq \frac{na}{2}$  ou  $\geq \frac{\sqrt{n}}{7}$ . 3° Si  $D$  est un domaine convexe fermé

dont la frontière admet en chaque point une courbure non-nulle ou bien est une courbe qui ne contient aucune portion rectiligne de longueur  $\geq$  que le quart du diamètre de  $D$ , le minimum est  $\geq c \cdot n$ , où  $c$  est une constante indépendante de  $n$ . L'aut. établit aussi que si les  $n$  zéros de  $f(z)$  sont tous réels et situés dans  $(-1, 1)$  et si  $f''(z)$  ne change pas de signe entre deux zéros consécutifs de  $f(z)$ , la distance de ces deux zéros est  $\leq \frac{2}{\sqrt{2n-3}}$

pour  $n$  pair et est  $\leq \frac{2}{\sqrt{2n-3}} \frac{\sqrt{n^2-2n}}{n-1}$  pour  $n$  impair ( $\geq 3$ ).

T. Popoviciu (Cernăuți).

Sagastume Berra, Alberto E.: Über eine algebraische Definition der Differentialquotienten. An. Soc. Sci. Argent. 127, 321—327 (1939) [Spanisch].

Axiomatische Begründung der Regeln über partielle Differentiation durch Betrachtung der Ausdrücke

$$f + f_{x_1} \varepsilon_1 + \dots + f_{x_n} \varepsilon_n,$$

wo die  $\varepsilon_i$  hyperkomplexe Einheiten mit  $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$  sind. Hasse (Göttingen).

Steffensen, J. F.: Note on divided differences. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 17, Nr 3, 1—12 (1939).

Überraschenderweise läßt sich die Leibnizsche Regel für den  $r$ -ten Differentialquotienten eines Produktes sehr einfach auf Differenzenquotienten übertragen. Das Produkt

$$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$$

hat den  $r$ -ten Differenzenquotienten

$$\varphi(x_0 \dots x_r) = \sum_{v=0}^r f(x_0 \dots x_v) \cdot g(x_v \dots x_r),$$

wobei Funktionszeichen mit mehreren Argumenten in üblicher Weise Differenzenquotienten mit den betr. Werten als Stützstellen bedeuten. Der Beweis ist durch Induktion leicht zu führen. Die Regel von Leibniz folgt durch Grenzübergang, bekannte Sätze über Differenzen durch Spezialisierung der Stützstellen. Der Ansatz

$$f(x) = F(t) - F(x), \quad g(x) = \frac{1}{t-x}$$

führt zur Newtonschen Interpolationsformel und zur Taylorsche Formel, in beiden Fällen mit Restgliedern ungewohnter Gestalt. Satz und Beispiele werden auch auf Produkte von mehr als zwei Faktoren übertragen. Theodor Zech (Darmstadt).

John, F.: Special solutions of certain difference equations. Acta math. 71, 175—189 (1939).

Die Arbeit behandelt die Kennzeichnung von Lösungen der Differenzengleichungen

$$(1) \quad f(x+1) - f(x) = g(x),$$

$$(2) \quad a_0 f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + \dots + a_n f(x) = g(x)$$

durch Anforderungen an Monotonie (Nicht-Abnehmen) und „strenge“ Konvexität. [Verf. nennt  $f(x)$  „streng konvex“, wenn  $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$  für alle  $0 < \lambda < 1$  gilt, und bezeichnet den Sonderfall  $\lambda = \frac{1}{2}$  mit „konvex“!] — Für die Differenzengleichung (1) unterscheiden sich zwei monotone bzw. streng konvexe



Lösungen höchstens um eine additive Konstante, sobald (für  $0 < x \rightarrow \infty$ ) zusätzlich

$$\underline{\lim} g(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\lim} g(x): x = 0$$

angenommen wird; und bei  $g(x) \rightarrow 0$  bzw.  $g'(x) \downarrow 0$  gelingen Reihendarstellungen dieser Lösungen. — Im Falle (2) seien die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$F(\varrho) = x_0 \varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

sämtlich einfach und von der Form  $e^{i\varphi}$ . Ist dann  $\varrho = +1$  eine von ihnen, so unterscheiden sich bei  $g(x) \rightarrow 0$  zwei monotone Lösungen nur um eine additive Konstante; sind sie alle  $\neq +1$  so gibt es höchstens eine monotone Lösung, wenn  $g(x): x \rightarrow 0$  strebt. Ist überdies  $g'(x)$  vorhanden und stetig, so gelten entsprechende Aussagen, wenn man  $g$  durch  $g'$ , monoton durch streng konvex ersetzt. Beispiele. *Ulrich.*

### Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Quade, W., und L. Collatz: Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen. S.-B. preuß. Akad. Wien 1938, 383—429.

Data una funzione  $f(x)$  continua e periodica a periodo  $2\pi$ , gli AA. considerano, con Runge, la funzione approssimante (Annäherungsfunktion)  $g(x)$  ottenuta nel seguente modo. Presi i punti  $x_\mu = \mu h$ , ( $\mu = 1, 2, \dots$ ),  $h = \frac{2\pi}{m}$ , ( $m$  intero positivo qualunque, sia  $f_\mu = f(x_\mu)$ : per ogni intero positivo  $k$  si costruisce allora quella ben determinata funzione  $g(x)$  continua e periodica con le sue prime  $k$  derivate, costituita, in ognuno degli intervalli  $(x_\mu, x_{\mu+1})$  da una parabola di ordine  $k+1$ , e coincidente con  $f(x)$  nei punti  $x_\mu$ . Accanto a  $g(x)$ , gli AA. considerano, facendo su  $f(x)$  ulteriori ipotesi, gli sviluppi in serie di Fourier di  $g(x)$  e  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu \cos \nu x + B_\nu \sin \nu x), \quad g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

e il polinomio

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{\varrho=1}^{\frac{m}{2}-1} (a'_\varrho \cos \varrho x + b'_\varrho \sin \varrho x) + \frac{1}{2} a'_m \cos \frac{m}{2} x, \quad (m \text{ pari}),$$

oppure

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{\varrho=1}^{\frac{m}{2}-1} (a'_\varrho \cos \varrho x + b'_\varrho \sin \varrho x), \quad (m \text{ dispari}),$$

corrispondente ai punti  $x_\mu$  presi come punti dell'interpolazione trigonometrica di  $f(x)$ , ponendo:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad C_\nu = A_{\nu+i} B_\nu, \\ c_\nu = a_\nu + i b_\nu, \quad c'_\nu = a'_\nu + i b'_\nu.$$

Gli AA. studiano l'espressione delle  $c_\nu$  e dei rapporti  $\tau_\nu = \frac{c_\nu}{c'_\nu}$  (Abminderungsfaktor di Dällendach), e danno una valutazione della differenza  $f(x) - S_n(x)$  e dell'altra  $r_\nu = C_\nu - c_\nu$ , con esempi numerici. Tale studio viene condotto a termine per  $k = 1, 2, 3$  e per  $k$  pari qualunque, con esempi numerici. Infine gli AA. dimostrano che per  $k \rightarrow \infty$ ,  $g(x)$  tende al polinomio trigonometrico interpolante di  $f(x)$ . *Luigi Beretta.*

● Feldheim, Ervin: Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique. (Mem. Sci. math. Fasc. 95.) Paris: Gauthier-Villars 1939. 94 pag. Frs. 20.—.

Bericht über Konvergenzfragen bei unbegrenzter Vermehrung der Interpolationsstellen (Knoten). Im folgenden sei stets  $-1 \leq x \leq 1$  als Interpolationsintervall  $J$  und  $f(x)$  als eine dort stetige, zu interpolierende Funktion angenommen. Im Normalfall der Lagrangeschen Ip. (= Interpolation) bilden die Knoten  $x_n$  (alle auf  $J$ ) eine



beliebige unendliche Dreiecksmatrix  $\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$ ; die  $n$ -te Zeile bestimmt die

„Grundpolynome“  $l_{n\nu}(x)$  (die bei  $x_{n\nu}$  gleich 1, bei den anderen Knoten gleich 0 sind) bzw. zusammen mit  $f(x)$  die Lagrangesche Ip.-Folge  $L_n(x; f)$ , wobei immer der kleinstmögliche Grad  $n-1$  gefordert bleibt. Wichtige Sonderfälle der Knotendreiecke ergeben sich, wenn die  $x_{n\nu}$  als Nullstellen bekannter Polynomfolgen gewählt werden; wir nennen die Dreiecke  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{J}$ , sie entsprechen den Tschebyscheffschen Polynomen  $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$ ,  $x_{n\nu} = \cos(2\nu-1)\pi/2n$ ; den Orthogonalpolynomen zum Gewicht  $p(x) (\geq p_0 > 0)$ ;  $R$ -integrierbar; den Jacobischen Polynomen  $J_n(x; \alpha, \beta)$  die als Sonderfall für  $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  entstehen; endlich ist das Newtonsche Dreieck  $\mathfrak{N}$  mit äquidistanten Knoten auf  $J$  wichtig. — Kap. I stellt zuerst die bekannt gewordenen und z. T. schon klassischen Divergenzerscheinungen besonders bei  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{L}$  zusammen (Meray, Runge, Borel, Faber), zeigt die Rolle der „Norm“  $\lambda_n(x) = \sum |l_{n\nu}(x)|$  und die Hahnsche Erkenntnis, daß deren Beschränktheit  $\lambda_n(x_0) = O(1)$  notwendig und hinreichend sei, damit für jedes  $f(x)$  die Ip.-Folge  $L_n(x_0; f) \rightarrow f(x_0)$  strebe; bei  $\mathfrak{N}$  ist diese Bedingung nirgends erfüllt. Zu jedem Dreieck gibt es ein stetiges  $f(x)$ , wofür (wenigstens an einer Stelle) Divergenz eintritt. Gewisse formale Analogien zwischen  $\mathfrak{L}$ -Ip. und Fourierschen Reihen finden eine Grenze in bemerkenswerten Abweichungen, wie dem Versagen der arithmetischen Mittel bei der Ip., die fast überall in  $J$  divergieren können. Ein besonderer Mangel der Lagrange-Ip. wurde von de la Vallée-Poussin bemerkt und von Fréchet untersucht: den Einfluß kleiner Abweichungen von  $f(x)$  in den Knoten (Beobachtungsfehler) zu übertreiben; das stört in „der Hälfte“ von  $J$ . — Dem stellt Kap. V positive Konvergenzaussagen über  $L_n(x; f)$  gegenüber. Innerhalb  $J$  (= auf jedem abgeschlossenen Teilintervall) kann gleichmäßige Konvergenz gegen  $f(x)$  bei Zusatzforderungen an  $f$  gesichert werden, wie: Differenzierbarkeit; Darstellbarkeit von  $f(x) = \int \varphi(x) dx + c$  als Riemannsches Integral (Kryloff, bei  $\mathfrak{L}$ ); bei Lipschitzbedingungen  $|f(x'') - f(x')| < C |x'' - x'|^\lambda$  einer Ordnung  $\lambda > \frac{1}{2}$  wenigstens für Dreiecke wie  $\mathfrak{P}$  (s. oben); gilt sogar  $p(x) \sqrt{1-x^2} \geq p > 0$ , so erreicht man sogar glm. Konvergenz auf ganz  $J$ . — Ein anderes Verfahren, die Konvergenzverhältnisse zu verbessern, liegt im Abweichen von der Forderung kleinsten Grades der Ip.-Polynome. Dieser Hermiteschen Interpolation sind die Kap. II—IV gewidmet. Der  $n$ -ten Dreieckszeile wird ein Polynom vom Grade  $g(n)$  zugeordnet, und für  $g(n) > (1+\epsilon)n$  können bei stetigem  $f(x)$  gleichmäßig konvergente Ip.-Folgen hergestellt werden. Kap. IV behandelt insbesondere den klassischen Hermiteschen Fall  $g(n) = 2n-1$  mit Zusatzforderungen für die Ableitung  $L'_n(x; f)$  in den Knoten, wie Verschwinden oder Beschränktheit; dabei hat Fejér die Bedeutung der konjugierten Punkte der Knoten erkannt und vielfach untersucht und den Fall der Normalverteilung der Knoten (alle Konjugierten außer  $J$ ) hervorgehoben; dieser liegt z. B. bei  $\mathfrak{L}$  vor, wo die Konjugierten  $x_{n\nu}^* = 1 : x_{n\nu}$  sind, und beim Jacobischen Dreieck  $\mathfrak{J}$  für  $-1 \leq \alpha, \beta < 0$ , wo Szegő und Shohat abgerundete Konvergenzsätze gewonnen haben; beim Newtonschen Dreieck  $\mathfrak{N}$  dagegen erfüllen die Konjugierten  $J$  dicht, womit die schlechten Konvergenzverhältnisse zusammenhängen. — Kap. III behandelt den Parallellfall trigonometrischer Ip. Kap. VI Ip.-Umkehrsätze. Aus bekannten Konvergenzerscheinungen der Ip.-Folge werden Rückschlüsse auf die Knotenverteilung u. a. m. gezogen; hier sind einige (bisher unveröffentlichte) Sätze von Erdős-Grünwald-Turán bemerkenswert: Aus der Beschränktheit der Grundpolynome  $|l_{n\nu}(x)| \leq C$  folgt eine gewisse Gleichverteilung der Knoten, aber nicht auf dem  $x$ -Intervall  $J$ , sondern auf dem transformierten  $\vartheta$ -Intervall,  $\vartheta = \arccos x$ , nämlich  $\frac{c_1}{n} < \vartheta_{n,\nu+1} - \vartheta_{n,\nu} < \frac{c_2}{n}$ ; weiß man noch, daß die Knotenmatrix aus einem Orthogonalsystem mit einem Gewicht  $p(x) \geq p_0$  entspringt, so gilt  $\vartheta_{n,\nu+1} - \vartheta_{n,\nu} > \frac{c}{n^2}$ ; die Knoten können sich nicht allzu nahe kommen. — Kap. VII behandelt ähnliche



Konvergenzerscheinungen bei Verfahren zur mechanischen Quadratur nach Gauß und Cotes, im Anschluß an Untersuchungen von Pólya, und bes. im Hinblick auf Quadraturen, die sich auf Ip.-Folgen stützen. Kap. VIII endlich untersucht Konvergenz im quadratischen (oder höheren) Mittel. — Ausführliches Schriftenverzeichnis.

Ulrich (Gießen).

Beretta, L., e L. Merli: Sulla convergenza in media della formula di interpolazione di Hermite. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 322—330 (1939).

Soit  $f(x)$  continue dans  $(-1, 1)$  et considérons la formule d'interpolation d'Hermite

$$X_n(f) = \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) h_k(x) + \sum_{k=1}^n y_k^{(n)} \eta_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

En complétant divers résultats connus (voir E. Feldheim, ref. prec.), les aut. démontrent que si: 1°  $x_k^{(n)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  sont les zéros de la dérivée du polynome de Tchebycheff  $\cos[(n+1)\arccos x]$ , 2°  $\max_{k=1, 2, \dots, n} (|y_k^{(n)}|) = O(\sqrt{n})$ , on a

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} [X_n(f) - f(x)]^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

T. Popoviciu (Cernăuți).

Beretta, Luigi: Su un teorema di J. Shohat. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 218—220 (1939).

Vereinfachung des Grünwald-Turánschen Beweises (dies. Zbl. 18, 252) eines Satzes von J. Shohat (dies. Zbl. 6, 159).

T. Popoviciu (Cernăuți).

Montel, Paul: Sur quelques interpolations spéciales. Rev. math. Union. Interbalkan. 2, 107—115 (1938).

Verf. beschäftigt sich mit Interpolation analytischer  $f(z)$  unter einigen besonderen Forderungen an die Gestalt der interpolierenden Funktion  $j_n(z)$ , die infolge dieser Forderungen i. a. nicht mehr eindeutig bestimmt ist, sondern auf mehrere Arten so gewählt werden kann, daß sie in den vorgeschriebenen  $n$  Stellen die vorgeschriebenen Werte  $f(z_v)$  annimmt. Ein erstes Beispiel [wenn  $f(z)$  nur Nullstellen gerader Vielfachheit zeigt] bietet die Forderung, daß  $j_n(z)$  ein reines Quadrat sei, ein zweites die Zulassung eines variablen Pols  $\alpha_n$ , so daß  $j_n(z) = P_{n-2}(z)(z - \alpha_n)^{-p}$  wieder  $n$  Parameter enthält; dabei wird auch der Grenzfall mehrerer zusammenfallender  $z_v$  behandelt. Besonderes Augenmerk gilt den Konvergenzverhältnissen für  $n \rightarrow \infty$ , insbesondere für das Verhalten der Folge  $\alpha_n$ , für das einige typische Fälle hervorgehoben sind.

Ulrich (Gießen).

Walsh, J. L.: On interpolation by functions analytic and bounded in a given region. Trans. Amer. Math. Soc. 46, 46—65 (1939).

In einer früheren Arbeit [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 477—486 (1938); dies. Zbl. 19, 404] hat Verf. folgendes Problem aufgestellt: Die Punkte  $\beta_{n1}, \beta_{n2}, \dots, \beta_{nn}$  seien innerhalb eines Gebiets  $R$  der komplexen  $z$ -Ebene gelegen. Die Funktion  $f(z)$  sei analytisch in jedem  $\beta_{nk}$ . Sei  $f_n(z)$  diejenige (oder eine) der in  $R$  analytischen Funktionen, welche in  $\beta_{n1}, \beta_{n2}, \dots, \beta_{nn}$  mit  $f(z)$  übereinstimmen, deren obere Grenze  $M_n$  in  $R$  kleinstmöglich ist. Es gilt die Konvergenz der Funktionenfolge  $f_n(z)$  gegen  $f(z)$  und die Zahlenfolge  $M_n$  für  $n \rightarrow \infty$  zu studieren. Hier werden über das Problem allgemeinere Resultate abgeleitet als früher (l. c.).

V. Paatero (Helsinki).

Cassina, Ugo: Formule sommatorie e di quadratura con l'ordinata media. Atti Accad. Sci. Torino 74, 300—325 (1939).

L'A. studia formule sommatorie del tipo:

$$\sum_0^{2n} f_r = c f_n + \sum_0^{m-1} C_s (f_s + f_{n-s})$$

i coefficienti vengono determinati in modo da avere l'esattezza per i polinomi di un certo grado; ne determina poi il resto per una funzione qualsiasi. Dà infine le formule di quadratura corrispondenti, che per i primi valori di  $m$  coincidono con le formule note (di Gauss, Cavalieri-Simpson).

L. Beretta (Firenze).



**Reihen:**

**Hornich, Hans:** Über eine Konvergenzordnung von Reihen. *Mh. Math. Phys.* **47**, 217—223 (1939).

Im Anschluß an seine Untersuchungen zu einer geometrischen Theorie der Reihen (dies. Zbl. **18**, 208, 209) definiert Verf. ein Maß für die Stärke der Konvergenz absolut konvergenter Reihen. Jeder absolut konvergenten Reihe wird eine Ordnungszahl  $\leq \omega$  als „Konvergenzordnung“ zugewiesen, wobei den folgenden plausiblen Forderungen entsprochen wird: 1. Die Konvergenzordnung einer Reihe ist unabhängig von der Anordnung der Glieder. 2.  $\sum a_n$  und  $\sum c a_n$  haben für beliebiges  $c \neq 0$  stets dieselbe Konvergenzordnung. 3. Die Konvergenzordnung einer Reihe ist  $\leq$  der Konvergenzordnung jeder Teilreihe. Einige Reihenklassen werden auf ihre Konvergenzordnung untersucht.

F. Lösch (Rostock).

**Garabedian, H. L.:** A sufficient condition for Cesàro summability. *Bull. Amer. Math. Soc.* **45**, 592—596 (1939).

Verf. zeigt im wesentlichen: Erfüllt eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  für ein ganzes  $k \geq 1$  die Bedingungen  $\Delta^{k-1} a_0 \neq 0$ ,  $\Delta^i a_0 = 0$  für  $i \geq k$ , so ist sie  $(C, k)$ -, nicht aber  $(C, k-1)$ -summierbar. Überdies ist  $(C, k)$ - $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^n a_0$ , was auch unmittelbar daraus folgt, daß dieser Wert unter den genannten Bedingungen mit  $(E, 1)$ - $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  übereinstimmt.

F. Lösch (Rostock).

**Bateman, H.:** The transformation of a Lagrangian series into a Newtonian series. *Proc. nat. Acad. Sci., U.S.A.* **25**, 262—265 (1939).

Unter einer Lagrangeschen Reihe versteht der Verf. eine Reihe vom Typus

$$a_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{z-c-\nu}{z+c+\nu}. \quad (1)$$

Die Umformung einer Newtonschen Reihe in eine Reihe (1) wird mit Hilfe der Lagrange-schen Entwicklung

$$p(z+c/p) = \sum_{n=0}^{\infty} (2c+2n-1)(n+p-1/p, p-1)(2c+n/p, p-1) R_n(z)$$

durchgeführt, worin  $R_0(z) = 1$ ,  $R_n(z) = \prod_{\nu=1}^n \frac{z-c-\nu}{z+c+\nu}$ ;  $n = 1, 2, \dots$  und  $(q/p)$  der

Koeffizient von  $t^p$  in  $(1+t)^q$  ist. — Um umgekehrt eine Reihe (1) in eine Newtonsche Reihe zu transformieren, kann man im Falle  $C = 0$  die Identität

$$\frac{(1-z, p)}{(1+z, p)} = \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^{n+p-1} (z/p, n) \frac{(1-n, p)}{(1+n, p)} \quad (2)$$

benutzen, wobei  $(m, n) = \prod_{\nu=0}^{n-1} (m+\nu)$ ,  $(m, 0) = 1$  und  $(m, 1) = m$  ist. — Ist  $c = 0$ , so läßt sich die Entwicklung einer Funktion  $f(z)$  in eine Reihe (1) symbolisch in der Form

$$z f(z) = f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \prod_{\nu=1}^n \frac{z-\nu}{z+\nu} P_n(1-2E) f(1) \quad (3)$$

schreiben, wenn die  $P_n$  gewisse Polynome von  $E$  sind und  $E^s$  einen Operator bedeutet, welcher  $f(1)$  in  $f(s+1)$  überführt. — Von (2) und (3) werden interessante Spezialfälle behandelt und Anwendungen gemacht.

Lammel (Prag).

**Vignaux, J. C.:** Erweiterungen des Satzes von Abel und Stolz und über einige lineare Funktionaltransformationen. An. Soc. Ci. Argent. 126, 321—344, 401—428 (1938); 127, 161—185 (1939) [Spanisch].

Im ersten Teile überträgt Verf. die Grenzwertsätze von Abel-Stolz, Frobenius-Stolz und Hölder-Stolz auf Potenzreihen zweier komplexen Veränderlichen. Sodann untersucht er die Abelsche (A. S.) und die Cesàrosche Summierbarkeit (C. S.) solcher Reihen und folgert aus der C. S. unter gewissen Annahmen die A. S. — Im zweiten Teile behandelt er die Laplacesche Integralverwandlung mit endlichem Grundgebiete in einer und zwei Veränderlichen, ferner das Laplacesche Integral einer und zweier dualen komplexen Veränderlichen der Form  $z = x + ky$  ( $k^2 = 0$ ); weiter einfache und zweifache Integralverwandlungen von LeRoy und solche von Heine.

Koschmieder (Graz).

**Sz. Nagy, Béla v.:** Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 90, 103—134 (1938).

**Sz. Nagy, Béla v.:** Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 91, 3—24 (1939).

$K_m$  sei die Klasse derjenigen integrierbaren, nach  $2\pi$  periodischen Funktionen  $f(x)$ , für welche  $|f(x)| \leq 1$  und  $f(x) \sim \sum_{k=m}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  gilt. Verf. betrachtet die transformierten Reihen  $T_\lambda f(x) \sim \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , wobei die Faktorenfolge  $\{\lambda_k\}$  zu einer gegebenen integrierbaren Funktion  $\lambda(x) \sim \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k \cos kx$  gehört, und stellt die Aufgabe,  $M_m = \max_{f \in K_m} \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |T_\lambda f(x)|$  zu bestimmen. Mit Benutzung der Fejérschen Sätze über die arithmetischen Mittel und einer Landauschen Schlußweise gelangt er zu der Ungleichung:

$$|T_\lambda f(x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x+t) \lambda(t) dt \right| \leq M_m = \min \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\lambda(t) + P_{m-1}(t)| dt, \quad (*)$$

wo  $P_{m-1}(t)$  die Gesamtheit der trigonometrischen Polynome höchstens  $m-1$ -ter Ordnung durchläuft. Das Minimalpolynom  $P_{m-1}^*(t)$ , für welches das Integral rechts in (\*) seinen kleinsten Wert  $M_m$  erreicht, wird durch die Bedingung  $\text{sgn} \{\lambda(x) + P_{m-1}^*(x)\} \in K_m$  charakterisiert. Ist  $\{\lambda_k\}$  eine dreifach monotone Nullfolge, so gelingt die explizite

Bestimmung des Minimalpolynoms  $P_{m-1}^*$ , und es ergibt sich:  $M_m = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda_{(2\nu+1)m}}{2\nu+1}$ .

[Im Falle  $m=0$  genügt zweifache Monotonie von  $\{\lambda_k\}$ , und es ist  $M_0 = \lambda_0$ .] Für die zu  $T_\lambda f(x)$  konjugierten Reihen gelten analoge Sätze. Durch geeignete Wahl der Folge  $\{\lambda_k\}$  gelangt Verf. zu Sätzen über harmonische Funktionen, (C,  $\alpha$ )-Mittel von Fourierschen Reihen, reguläre Approximation, welche einzelne Sätze von Schwarz, Koebe, Fejér, Favard als spezielle Fälle enthalten. — Im zweiten Teile der Arbeit werden die entsprechenden Transformationen der Fourierschen Reihen fastperiodischer Funktionen sowie der Fourierschen Integrale betrachtet und analoge Sätze hergeleitet.

E. Egerváry (Budapest).

**Marcinkiewicz, Joseph:** Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 239—240 (1939).

Es wird der Satz bewiesen: Wenn die Funktion  $f(u)$  der Bedingung genügt  $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} t^{-1} [f(x+t) - f(x-t)]^p dx dt < \infty$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , dann konvergiert ihre Fourierreihe fast überall. Der Satz ist bekannt für  $p=1$ ,  $p=2$ . Am Schlusse wird angegeben,



daß in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 21, 120) zwei Ungleichheiten durch andere ersetzt werden müssen, wodurch jener Beweis im übrigen nicht verändert wird.

Kienast (Küsnacht-Zürich).

**Marcinkiewicz, J.:** Sur la sommabilité forte de séries de Fourier. J. London Math. Soc. 14, 162—168 (1939).

Ist  $s_n = a_0 + \dots + a_n$  und gibt es eine Zahl  $s$  derart, daß  $\sum_0^n (s_r - s)^2 = o(n)$ , so heißt die Reihe  $\sum a_n$  summierbar  $H_2$ . Hardy und Littlewood haben diese Definition 1913 eingeführt und bewiesen: Wenn  $f(u)$  quadratisch integrierbar ist, dann ist die zu  $f(u)$  gehörende Fourierreihe summierbar  $H_2$ . In dieser Note wird bewiesen: Wenn  $f(u)$  integrierbar ist, dann sind ihre Fourierreihe und deren konjugierte Reihe fast überall summierbar  $H_2$ . Der Beweis ist zerlegt in die Beweise von 9 Hilfssätzen, die, mit ausführlichen Zitaten versehen, z. T. bekannt sind. Das wesentliche Neue ist zusammengefaßt in Lemma 4. Darin werden Bedingungen formuliert für das Bestehen von  $\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum \sigma_r^2 r^n = 0$ , wenn  $\sigma_r$  die Partialsummen der Fourierreihe der Funktion  $f(u)$  sind.

Kienast (Küsnacht-Zürich).

**Wolf, František:** On summable trigonometrical series: An extension of uniqueness theorems. Proc. London Math. Soc., II. s. 45, 328—356 (1939)

Der Verf. untersucht die Natur der  $(C, k)$ -summierbaren trigonometrischen Reihen unter Verallgemeinerung des bekannten Theorems von de la Vallée Poussin. — Es sei erinnert, daß restringierte Fouriersche Reihen jene trigonometrischen Reihen heißen, die zwar keine Fourierschen Reihen sind, die sich aber in gewissen, in  $(0, 2\pi)$  ganz enthaltenen Intervallen, in bezug auf eine gewisse Summierungsmethode wie  $L$ -Fouriersche Reihen zu der gewöhnlichen Konvergenz verhalten. — Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist folgendes: Sei  $(*) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  eine

trigonometrische Reihe; wenn  $k \geq 0$  eine ganze Zahl ist, wenn die zwei Funktionen

$$S(x) = \varlimsup_{N \rightarrow \infty} S_k(x, N), \quad s(x) = \varliminf_{N \rightarrow \infty} S_k(x, N),$$

$$S_k(x, N) = \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right)^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nach Perron in  $(a, b)$  integrierbar und in  $(a, b) - H$  endlich sind ( $H$  abzählbare Menge) und wenn in  $H$ :  $S_k(x, N) = o(N)$  gilt, dann existiert eine in  $(a, b)$  reduzierbare Menge  $C$  (d. h.  $C'$  ist abzählbar) derart, daß in jedem Intervall von  $(a, b)$ , das keine Punkte von  $C$  enthält, die Reihe  $(*)$  eine restringierte Fouriersche Reihe ist. — Wenn außerdem  $\bar{S}_k(x, N) = o(N^2)$  für alle  $a \leq x \leq b$ , in denen  $\bar{S}_k(x, N)$  wie  $S_k(x, N)$  für die konjugierte Reihe von  $(*)$  definiert ist, dann ist  $(*)$  eine restringierte Fouriersche Reihe in  $(a, b)$ . Wenn schließt man  $(a, b) \equiv (0, 2\pi)$ , dann ist fast überall  $S(x) = s(x)$  und  $(*)$  die Fouriersche Reihe von  $S(x)$ . Dieses Ergebnis schließt sich an ein ähnliches von S. Verblunsky (dies. Zbl. 8, 310) an.

L. Cesari (Pisa).

**Bhatnagar, P. L.:** On the Abel summability of the conjugate series of Fourier series. Bull. Calcutta Math. Soc. 31, 31—44 (1939).

Sei  $f(x)$  eine mit Periode  $2\pi$  periodische,  $L$ -integrierbare Funktion und  $(*) \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$  ihre konjugierte Fouriersche Reihe. Sei  $V(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) r^n$ ,  $0 \leq r < 1$ , und sei  $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$ ,  $\Psi_0(t) = \psi(t)$ ,  $\Psi_n(t) = 1/n! \int_0^t (t-u)^{n-1} \psi(u) du$ ,  $n$  ganze Zahl,  $\psi_n(t) = (n+1)! \Psi(t)/t^n$ . Ein früheres Resultat von B. N. Prasad (dies. Zbl. 4, 347) verallgemeinernd, beweist der Verf.: Wenn für ein  $n$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \psi_n(t) dt = 0 \quad (**)$$

gilt, dann gilt auch

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left[ V(r, x) - \frac{1}{\pi} \int_k^{\infty} \psi_n(t)/t dt \right] = 0. \quad k = 1 - r$$

Die Bedingung (\*\*) schließt die Existenz des Grenzwerts  $1/\pi \int_{+0}^{\infty} \psi_n(t)/t dt$  nicht ein.

Wo dieser Grenzwert existiert, ist er die nach der Abelschen Methode errechnete Summe der Reihe (\*) im Punkt  $x$ . Für  $n=1$  wird von neuem das Prasadsche Resultat gefunden.

*L. Cesari* (Pisa).

**Sidon, S.: Hinreichende Bedingungen für den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe.** J. London Math. Soc. 14, 158—160 (1939).

In questa nota si danno due condizioni sufficienti per le successioni di Fourier.

I: „Sia  $|\alpha_n| < 1$  per  $n = 1, 2, \dots$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} |p_n| < \infty$  e si ponga  $\beta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{i=n}^k \alpha_i$ ; ne segue che  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos nx$  è una serie di Fourier.“ Questo teorema è una generalizzazione di quello di Young-Kolmogoroff, indipendente da quella di Cesari-Moore. —

II: „ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  è una serie di Fourier, se  $a_n = q_k$  per  $n_k < n \leq n_{k+1}$ ,  $n_{k+1} - n_k = O(1)$   $\lim q_k = 0$  ed è  $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta(q_k \log k)| < \infty$ .“ Questo teorema generalizza uno già dato dall'A. Sandro Faedo (Roma).

### Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

**Rádl, Franz:** Über die Teilbarkeitsbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialpolynomen. Math. Z. 45, 429—446 (1939).

Verf. definierte [Math. Z. 31, 441—456 (1930), Über die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome] die wechselseitige Transformation zweier Differentialpolynome  $a, b$  mit den Lösungen  $y_a, y_b$  von  $a = 0$  und  $b = 0$  auf die Differentialpolynome  $a_1, b_1$  (Lösungen  $y_{a_1}, y_{b_1}$ ) dadurch, daß alle  $y_{a_1} = b(y_a)$  und alle  $y_{b_1} = a(y_b)$  sein sollen. Er bildete das Schema

$$a_{-\nu}, b_{-\nu} \rightarrow \dots \rightarrow a, b \rightarrow a_1, b_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_\mu, b_\mu$$

und nannte  $a$  durch  $b$  rechtsseitig  $\mu$ -indiziert bzw. linksseitig  $\nu$ -indiziert teilbar, falls es Differentialpolynome  $p$  oder  $q$  so gibt, daß

$$a_\mu(y) \equiv p(b_\mu(y)) \quad \text{bzw.} \quad a_{-\nu}(y) \equiv b_{-\nu}(q(y)).$$

Verf. gibt nun Bedingungen für diese Teilbarkeit, denen die Koeffizienten von  $a$  und  $b$  zu genügen haben. Dabei ist  $b$  erster Ordnung und  $a$  entweder zweiter Ordnung (notw. und hinr. Bed.) oder dritter Ordnung (hinr. Bed.). Einige Beweise gelten auch für beliebige Ordnung.

*Adam Schmidt* (Weimar).

**Fayet, J.: Sur les équations différentielles linéaires et homogènes transformables en équations à coefficients constants au moyen d'un changement de fonction:  $y = \lambda(z) y$ .** Rev. Un. Mat. Argent. 1, 9—16 (1936).

Stimmt mit der in dies. Zbl. 16, 23 ref. Note überein.

*Ullrich* (Gießen).

**Cinquini, Silvio:** Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 271—283 (1939).

Diese Note gehört zum Ideenkreise anderer Arbeiten des Verf., des Ref., von Tonelli und Zwirner (vgl. dies. Zbl. 19, 345; 20, 122, 123, 223; 21, 128). Es handelt sich um Existenzsätze für die Randwertaufgabe  $y'' = f(x, y, y')$ ,  $y(a) = \alpha$ ,  $y(b) = \beta$ . Die Funktion  $f$  ist entweder im Streifen  $a \leq x \leq b$ ,  $|y| < +\infty$ ,  $|y'| < +\infty$  oder in der Punktmenge  $a \leq x \leq b$ ,  $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$ ,  $|y'| < +\infty$  erklärt. — Im ersten Falle, z. B., wird folgendes vorausgesetzt:  $f$  nach  $x$  meßbar und nach  $(y, y')$  stetig:  $|f(x, y, y')| \leq \psi_\lambda(x)$  für  $|y'| \leq \lambda$ , mit  $\psi_\lambda(x) \geq 0$  und über  $a \leq x \leq b$  summierbar:  $|f(x, y, y')| \leq \varphi(y) \varphi(y') + \chi(x)$ , mit  $\varphi(y), \chi(x)$  nichtnegativ und über  $-\infty < y < +\infty$ ,



bzw.  $a \leq x \leq b$  summierbar und  $\varphi(y')$  positiv, stetig, mit  $\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = \int_0^{-\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = +\infty$ ,

$k\varphi(u) > |u|$  [die letzte Bedingung ist überflüssig, wenn  $\chi(x) \equiv 0$ ]. *G. Scorza-Dragoni.*

**Poritsky, Hillel:** The reduction of the solution of certain partial differential equations to ordinary differential equations. (Cambridge, Mass., 12.—16. IX. 1938.) Proc. 5. internat. Congr. appl. Mech. 760—707 (1939).

L'A. propone un nuovo metodo per l'integrazione approssimata dei problemi al contorno relativi a equazioni a derivate parziali. Se, per esempio, l'equazione nella funzione incognita  $u(x, y)$  è l'equazione di Eulero di un integrale doppio  $J(u)$  e la soluzione richiesta è quella che si annulla sul contorno  $\gamma$  di un campo  $C$ , il metodo consiste nell'approssimare la funzione  $u(x, y)$  con un'espressione del tipo  $u_k(x, y) = \sum_{n=1}^k X_n(x) Y_n(x, y)$ ,

dove le  $Y_n(x, y)$  sono funzioni note nulle su  $\gamma$  e le  $X_n(x)$  si determinano minimizzando  $J(u_k)$ . Si trova così per le  $X_k(x)$  un sistema di equazioni differenziali ordinarie con condizioni ai limiti. Il metodo è illustrato con numerose applicazioni, ma nessuna indicazione è data circa la sua convergenza. Detto metodo è per molti aspetti analogo a quello escogitato da M. Picone per l'integrazione delle equazioni dei fenomeni di propagazione (questo Zbl. 16, 176).

*C. Miranda (Torino).*

**Orloff, Constantin:** Sur la formation de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, au moyen d'une intégrale complète. J. Math. pures appl., IX. s. 18, 145—156 (1939).

Une intégrale complète (1)  $z = u(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  à cinq constantes arbitraires  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  d'une équation aux dérivées partielles du second ordre s'appelle spéciale par rapport à  $a_1, a_2, a_3$ , si l'élimination des constantes  $a_1, a_2, a_3$  de l'équation (1) et de ses dérivées du premier ordre par rapport à  $x$  et à  $y$  conduit à une intégrale complète première à deux constantes arbitraires. Une intégrale complète qui est spéciale par rapport à  $a_1, a_2, a_3$  et en même temps par rapport à  $a_1, a_4, a_5$  produit deux intégrales complètes premières différentes en involution; il en résulte, par une quadrature, l'intégrale générale de l'équation considérée. Si une intégrale complète  $z = v(x, y, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$  n'est pas spéciale, une transformation convenable de la forme  $b_i = f_i(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , peut conduire à une intégrale qui est spéciale par rapport à deux groupes de constantes arbitraires. Il en résulte une méthode de la recherche de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qui est applicable p. ex. dans le cas de l'équation classique de la corde vibrante.

*O. Borůvka (Brünn).*

**Giraud, Georges:** Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique. J. Math. pures appl., IX. s. 18, 111—143 (1939).

Verf. betrachtet die allgemeine lineare elliptische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$Ju = \sum_{\alpha, \beta=1}^m a_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f$$

in einem offenen Gebiete  $D$ , dessen Rand  $S$  mittels einer endlichen Anzahl von  $(m-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten überdeckt werden kann, deren jede sich durch eine nach einer der Koordinaten aufgelöste Gleichung darstellen läßt, wobei die darstellenden Funktionen stetig differenzierbar sind und Ableitungen besitzen, die eine Hölderbedingung der Ordnung  $h \leq 1$  erfüllen. Als Randbedingung tritt hinzu

$$\Theta u = \sum_{\alpha, \beta=1}^m a_{\alpha, \beta} \omega_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + ku = \varphi$$

ein, wobei mit  $\omega_\beta$  die Richtungskosinus der äußeren Normale von  $S$  bezeichnet worden sind. Zweck der Arbeit ist die Zurückführung dieser Randwertaufgabe auf eine Fred-

**holmsche Integralgleichung.** Das wird dadurch ermittelt, daß man zunächst eine Hilfsfunktion  $H(x_1, \dots, x_m, \xi_1, \dots, \xi_m)$  konstruiert, mit folgenden Eigenschaften: 1. solange der Punkt  $X \equiv (x_1, \dots, x_m)$  von  $\Xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_m)$  verschieden ist, soll  $H$  zweimal stetig differenzierbar nach  $X$  sein; 2. wenn die beiden Punkte  $X, \Xi$  zusammenfallen, soll  $H$  wie eine dem Differentialoperator  $J$  gehörige Greensche Funktion unendlich werden; 3. die Funktionen, die man erhält, indem man die Operatoren  $J, \Theta$  auf  $H(X, \Xi)$  in bezug auf  $X$  anwendet, sollen beim Nullwerden der Abstand  $X\Xi$  unendlich groß der Ordnung  $m - h$  bzw.  $m - h - 1$  werden. Die Lösung  $u(X)$  wird alsdann in der Form

$$u(X) = \int_D^{(m)} H(X, A) \varrho(A) dV_A + \int_S^{(m-1)} H(X, B) \sigma(V) dS_B$$

gesucht, was für  $\varrho$  und  $\sigma$  zu einem Integralgleichungssystem führt. Die vollkommene Äquivalenz dieses Systems mit der gegebenen Randwertaufgabe kann im allgemeinen nicht behauptet werden; das trifft jedoch zu, wenn man die Koeffizienten  $c, x$  in passender Weise verändert. Setzt man dann das System  $Ju = f, \Theta u = \varphi$  in die Form  $Ju - c_1 u = f - c_1 u, \Omega u - k_1 u = \varphi - k_1 u$  um, bei passender Wahl von  $c_1, k_1$ , so ergibt sich für  $u$  ein zweites Integralgleichungssystem, das mit der Randwertaufgabe ganz äquivalent ist und vom Fredholmischen Typus ist. *G. Cimmino (Cagliari).*

**Minakshisundaram, S.: On the theory of non-linear partial differential equations of the parabolic type.** *J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 237—247 (1939).*

Verf. behandelt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - \frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad [p(x) > 0]$$

mit den zwei Randbedingungen  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, t \geq 0$  und  $u(x, 0) = f(x)$ , wo  $F$  eine Potenzreihe in  $u$  und  $u_x$  ist, insbesondere für  $F = u^r$  und  $F = u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Diese Untersuchung ist wesentlich eine verkürzte Nachahmung der Arbeit von Siddiqi, die die erste Randwertaufgabe behandelt (dies. Zbl. 4, 256). Die Lösung ist nämlich durch Fourieransatz  $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx$  und Auflösung eines Systems von Integralgleichungen gegeben. *M. Nagumo (Osaka).*

**Minakshisundaram, S.: On non-linear partial differential equations of the parabolic type.** (*Dep. of Math., Univ., Madras.*) *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 9, 479—494 (1939).*

L'A. si pone il problema dell'integrazione del problema al contorno

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u, p), \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

dove  $f(x, t, u, p)$  è una funzione definita e continua per  $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$  e per qualsiasi valore di  $u$  e  $p$ , lipschitziana rispetto a queste due ultime variabili uniformemente rispetto alle altre due, e  $u_0(x)$  è una funzione continua, nulla in 0 e  $\pi$ , con derivata prima di quadrato integrabile. Dette  $\varphi_n(x)$  le autosoluzioni ortogonali e normali del problema ai limiti:  $(\varrho \varphi')' + \lambda \varphi = 0, \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ , se si cerca di verificare le (1) e (2) con una funzione del tipo  $u = \sum u_n(t) \varphi_n(x)$ , si trova per le  $u_n(t)$  un sistema di infinite equazioni integrali non lineari che le determina univocamente. — Lo stesso procedimento è applicabile anche se le condizioni (2) sono sostituite da altre di tipo diverso, come pure allo studio di sistemi di equazioni del tipo (1). *C. Miranda.*

**Minakshisundaram, S.: On non-linear partial differential equations of the hyperbolic type.** *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 9, 495—503 (1939).*

Un metodo analogo a quello di cui l'A. si è valso nel lavoro sopra recensito (vedi



ref. precedente) è applicato all'integrazione del problema al contorno:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

C. Miranda (Torino).

**Schmidt, Erhard:** Bemerkung zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen I. Ordnung. Mh. Math. Phys. 48, 426—432 (1939).

$$\text{Es sei } A(f) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}}, \quad B(f) = \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}}, \quad K(f) = \sum_{\nu=1}^n [A(b_{\nu}) - B(a_{\nu})] \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}},$$

wobei  $a_{\nu} = a_{\nu}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $b_{\nu} = b_{\nu}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  einmal stetig differenzierbare Funktionen sind. Die beiden Behauptungen

$$K(f) = A(B(f)) - B(A(f)); \quad (a)$$

$$\text{aus } A(f) = B(f) = 0 \text{ folgt } K(f) = 0, \quad (b)$$

können bekanntlich leicht bewiesen werden, wenn  $f$  überdies sogar zweimal stetig differenzierbar ist, und zwar folgt dann (b) unmittelbar aus (a). Verf. beweist zum erstenmal die für die Theorie der linearen Differentialgleichungen wichtige Tatsache, daß (b) auch schon bei einmaliger stetiger Differenzierbarkeit von  $f$  gilt. Zum Beweis wird ein Prinzip benutzt, das auch beim Beweis des Cauchyschen Integralsatzes auftritt. Weiter wird für einmal stetig differenzierbare Funktionen  $f$  eine neue Identität für  $K(f)$  aufgestellt und gezeigt, daß (a) auch schon dann gilt, wenn  $a_{\nu}$ ,  $b_{\nu}$ ,  $f$ ,  $A(f)$ ,  $B(f)$  einmal stetig differenzierbar sind. Kamke (Tübingen).

### Potentialtheorie:

**Bateman, H.:** On some symmetrical potentials and the partial differential equation  $V_{ssxx} + V_{ssyy} + V_{tt} = 0$ . Mh. Math. Phys. 48, 322—328 (1939).

Verf. betrachtet Lösungen der partiellen Differentialgleichung  $V_{ssxx} + V_{ssyy} + V_{tt} = 0$ . Diese Lösungen stellt er als unendliche Integrale über ein Produkt einer Exponentialfunktion, einer Besselschen Funktion und einer zunächst willkürlichen Funktion dar. Er zeigt, wie in gewissen Fällen solche Integrale durch besondere Wahl der obengenannten willkürlichen Funktion durch Konturintegration in der komplexen Ebene erhalten werden können. Als Sonderfälle erhält er einige aus dem Schrifttum bekannte Integraltransformationen. Hierauf betrachtet er ein unendliches Integral der obengenannten Art, wobei der Integrand einen zweiten unendlichen Integralausdruck enthält. Auch in diesem Fall führt, wie an einigen Beispielen gezeigt wird, Konturintegration in der komplexen Ebene zum Ziel und erhält Verf. ebenfalls als Sonderfälle zwei aus dem Schrifttum bekannte Integraltransformationen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Nevanlinna, Rolf:** Bemerkungen zum alternierenden Verfahren. Mh. Math. Phys. 48, 500—508 (1939).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 20, 28), in der die Schwarzsche Randwertaufgabe auf eine Integralgleichung 2. Art zurückgeführt wurde, behandelt Verf. die Resolvente dieser Gleichung und gibt mit ihrer Hilfe einen Ausdruck für das harmonische Maß eines Randbogenelements des Vereinigungsgebiets  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$  mit Hilfe der harmonischen Maße der Einzelgebiete  $\vartheta_1, \vartheta_2$ . Die Integralgleichung erlaubt überdies die Bestimmung des harmonischen Maßes bzw. die Behandlung der ersten Randwertaufgabe auch für das Durchschnittsgebiet  $\vartheta = \vartheta_1 \cap \vartheta_2$ . Ullrich.

**Keldyeh, M., et M. Lavrentieff:** Sur une évaluation pour la fonction de Green. C. R. Acad. Sci. URSS N. s. 24, 102—103 (1939).

Une surface  $S$  est appelée surface de Liapounoff, si quels que soient deux

points  $M_1$  et  $M_2$  de la surface, l'angle  $\psi$  entre les normales à  $S$  de  $M_1$  et  $M_2$  vérifie l'inégalité

$$\psi < K \cdot (\overline{M_1 M_2})^\nu$$

où  $K$  et  $\nu$ ,  $0 < \nu < 1$  sont des constantes données. Soit  $D$  un domaine limité par une surface fermée et unie  $S$  dans l'espace à trois dimensions  $(x, y, z)$ . Désignons par  $G(P, Q)$  la fonction de Green pour le domaine  $D$  ayant pour pôle le point  $Q$ . L'auteur démontre que, si  $S$  est une surface de Liapounoff,

$$G(P, Q) < \frac{A \sigma s}{P Q^3};$$

$A$  est une constante qui ne dépend que de la forme du domaine  $D$ ;  $\sigma$  et  $s$  sont respectivement les distances des points  $P$  et  $Q$  de la surface  $S$ . *B. Hostinský (Brünn).*

**Picone, M., e C. Miranda: La formola di Green per i problemi con arbitraria derivata obliqua.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 160—165 (1939).

Sind in einem Gebiet  $T$  mit dem Rand  $FT$  eines euklidischen  $S_r$  reelle Funktionen  $a_{hk}(X) = a_{kh}(X)$ ,  $b_h(X)$  und  $c(X)$  ( $h, k = 1, \dots, r$ ) des Punktes  $X$ , welche entsprechend oft differenzierbar seien, gegeben und ist:

$$E[u] = \sum_{h,k=1}^r a_{hk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(X) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(X) \cdot u,$$

$$E'[u] = \sum_{h,k=1}^r \frac{\partial^2 (a_{hk} u)}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{h=1}^r \frac{\partial (b_h u)}{\partial x_h} + c(X) \cdot u,$$

so werden aus der Integralformel:

$$\int_T (v E[u] - u E'[v]) dX = - \int_{FT} \sum_{h,k=1}^r a_{hk} \left( v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \cos(x_h n) d\sigma - \int_{FT} b u v d\sigma$$

weitere Integralformeln gewonnen.

*Hornich (Wien).*

### Integralgleichungen, Integraltransformationen:

**Doetsch, Gustav: Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Integraltransformationen.** Math. Ann. 117, 106—128 (1939).

Verf. behandelt lineare Integralverwandlungen  $\mathfrak{I}$  mit dem Grundgebiete  $(0, \infty)$ , deren Kern nur vom Produkte der Veränderlichen abhängt, und die den ganzen Raum  $L^2(0, \infty)$  auf einen Teil seiner selbst abbilden. Er arbeitet dabei mit einer Verwandlung  $\mathfrak{N}$ , die aus der Mellinschen dadurch hervorgeht, daß man deren Bildveränderliche  $s$  auf eine senkrechte Gerade mit der Abszisse  $\frac{1}{2}$  beschränkt ( $s = \frac{1}{2} + iy$ ). Mit  $\mathfrak{N}$  erklärt Verf. eine der Faltung entsprechende Bildung, die er Komposition nennt, und gewinnt ein Seitenstück  $\mathfrak{f}$  des Faltungssatzes. — Man kann  $\mathfrak{I}$  als Kompositionsgleichung schreiben; dieser gibt Verf. durch  $\mathfrak{N}$  mit Hilfe von  $\mathfrak{f}$  die einfachere Gestalt einer algebraischen Gleichung, die ihn zu folgenden Ergebnissen führt:  $\mathfrak{I}$  besitzt höchstens abzählbar viele Eigenwerte  $\lambda$ , und diese sind paarweise entgegengesetzt gleich. Was die Eigenfunktionen  $\varphi$  betrifft, so gehört zu jedem  $\lambda$  eine zum Ursprung spiegelige Menge  $\mathfrak{M}_\lambda$  von Werten  $y$ , so daß in ihrer positiven Hälfte  $\mathfrak{N}\{\varphi\}$  frei wählbar ist; in der negativen ist  $\mathfrak{N}\{\varphi\}$  dadurch bestimmt, und außerhalb von  $\mathfrak{M}_\lambda$  verschwindet  $\mathfrak{N}\{\varphi\}$ . — Im besonderen untersucht Verf. die Eigenwerte involutorischer und unitärer Verwandlungen, also solcher  $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{I} = \mathfrak{U}$ , die sich mit demselben oder dem konjugierten Kerne umkehren lassen. Dabei bedient er sich der Spiegelfunktionen  $\psi$ , die durch  $\mathfrak{I}$  (nicht, wie die  $\varphi$ , in sich selbst, sondern) in ihre Konjugierten übergehen. Für  $\psi$  spielt  $\mathfrak{U}$  dieselbe Rolle wie  $\mathfrak{J}$  für  $\varphi$ . *L. Koschmieder (Brünn).*

**Marcinkiewicz, J., et A. Zygmund: Quelques inégalités pour les opérations linéaires.** Fundam. Math. 32, 115—121 (1939).

Une opération linéaire  $g = T(f)$  appartient à la classe  $L^{r,s}(a, b; c, d)$  ( $r > 0, s > 0$ )



si elle transforme toute fonction  $f \in L'(a, b)$  en une fonction  $g \in L^s(c, d)$ . La norme de  $T$  est le plus petit nombre  $M$  tel que

$$\left\{ \int_c^d |g(y)|^s dy \right\}^{\frac{1}{s}} \leq M \left\{ \int_a^b |f(x)|^r dx \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

On peut démontrer par un raisonnement de R. E. A. C. Paley (cf. Proc. London Math. Soc. **34**, 241—264 (1932), en particulier p. 250] que si  $M$  est la norme de l'opération  $T \in L^{r,s}(a, b; c, d)$ , alors on aura l'inégalité

$$\left\{ \int_c^d \left( \sum_{\nu} |g_{\nu}(y)|^2 \right)^{\frac{r}{2}} dy \right\}^{\frac{1}{r}} \leq M C_r \left\{ \int_a^b \left( \sum_{\nu} |f_{\nu}(x)|^2 \right)^{\frac{r}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{r}}, \quad (1)$$

pout toute suite  $f_{\nu} \in L'(a, b)$ , la constante  $C_r$  ne dépendant que de  $r$ . — En utilisant la théorie des fonctions indépendantes, les auteurs démontrent d'abord que (1) subsiste même avec  $C_r = 1$ . De plus, si  $r < \gamma < 2$ , alors (1) reste valable (avec  $C_r = 1$ ) même si l'on y remplace les chiffres 2 par  $\gamma$ . — Si  $M$  est la norme d'une opération  $T \in L^{r,s}(a, b; c, d)$ , alors il existe une constante  $K_{r,s,2}$  telle que

$$\left\{ \int_c^d \left( \sum_{\nu} |g_{\nu}(y)|^2 \right)^{\frac{s}{2}} dy \right\}^{\frac{1}{s}} \leq M K_{r,s,2} \left\{ \int_a^b \left( \sum_{\nu} |f_{\nu}(x)|^2 \right)^{\frac{r}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{r}}. \quad (2)$$

Dans le cas où  $r < \gamma$ ,  $s < \gamma$ ,  $\gamma < 2$ , (2) reste valable (avec une certaine constante  $K_{r,s,\gamma}$ ), lorsqu'on y remplace les chiffres 2 par  $\gamma$ . — On a les mêmes résultats pour les intégrales de Lebesgue-Stieltjes et pour les opérations  $T(f)$  définies seulement sur un sous-espace linéaire de  $L'(a, b)$ .

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

**Kober, Hermann:** Transformationen von algebraischem Typ. Ann. of Math., II. s. **40**, 549—559 (1939).

Let  $D_T$  be a domain in Hilbert space  $\mathfrak{H}$  and let  $T$  be a linear transformation so that  $T$  has a finite number of proper-values (Eigenwert)  $e_q$  ( $q = 0, 1, \dots, k-1$ ;  $k \geq 1$ ) and  $D_T$  is the linear manifold determined by the proper-functions (Eigenfunktion) of  $T$ . When  $\mathfrak{H}$  is the  $(L^2)$ -space of squarely integrable functions in the finite or infinite interval, where the inner product  $(f, g)$  is defined by  $\int f(x) \bar{g}(x) dx$ , Fourier transforms  $F$  in  $(L^2)$  satisfy the equation  $F^4 f - f = 0$ , and Hankel transforms  $H$  the equation  $H^2 f - f = 0$ . Therefore  $e_q = \pm 1, e^{\pm \pi i/2}$  for  $F$  and  $e_q = \pm 1$  for  $H$ . Transformations of the above type are called of type (A). The linear transformation  $g = Sf$  in  $\mathfrak{H}$  is called of algebraic type when the following conditions are satisfied: (1) the domain  $D_S$  of  $S$  is not empty and  $g = Sf$  belongs to  $D_S$  when  $f$  belongs to  $D_S$ . (2) There is a polynomial  $P_m(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0x^0$  with simple roots only, such that  $P_m(Sf) = S^m f + a_{m-1}S^{m-1}f + \dots + a_1Sf + a_0S^0f = 0$  for each  $f \in D_S$ . — The author proves that a transformation of the type (A) is of algebraic type and vice versa, and each function in  $D_S$  is represented uniquely by the sum of proper functions. He further treats such transformations with additional conditions: closedness, boundedness or unitarity, and he develops the theory of spectra. The results obtained contain new theorems concerning Hankel transforms, and transforms of a new type, different from Fourier and Hankel transforms and with many interesting properties.

Izumi (Sendai).

**Cossar, J.:** On conjugate functions. Proc. London Math. Soc., II. s. **45**, 369—381 (1939).

L'A. dà una nuova dimostrazione del seguente teorema di M. Riesz: Sia  $p > 1$  ed  $f(x)$  appartenga ad  $L^p$  (in  $(-\infty, +\infty)$ ); allora esiste una funzione  $g(x)$  pure di  $L^p$

per la quale riesce  $g(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$ ,  $f(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt$ , quasi ovunque,

e inoltre  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^p dx \leq A_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx$ , con  $A_p$  indipendente da  $f(x)$ . — La lettera  $P$  sta a indicare il valor principale dell' integrale. — La dimostrazione è data per  $p$  intero (da questo caso si può notoriamente dedurre quello generale).

G. Scorza-Dragoni (Padova).

**Mohan, Brij:** A short note on self-reciprocal functions. Bull. Calcutta Math. Soc. **31**, 17—18 (1939).

Es wird bewiesen: zugleich mit  $f(x)$  ist auch

$$g(x) = x^{\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)} I_{\frac{1}{2}(\mu-\nu)}(xy) f(y) dy$$

hinsichtlich der Hankeltransformation selbstreziprok, d. h. aus

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy} J_\nu(xy) f(y) dy \quad \text{folgt} \quad g(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy} J_\nu(xy) g(y) dy.$$

Schoblik (Brünn).

**Guinand, A. P.:** Summation formulae and self-reciprocal functions. II. Quart. J. Math., Oxford Ser. **10**, 104—118 (1939).

In Fortführung seiner Untersuchungen über Summenformeln (dies. Zbl. **18**, 363) betrachtet der Verf. in der vorliegenden Arbeit allgemeiner Ausdrücke der Gestalt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ S(N) - \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \Delta_m(N) \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^m \{ x^{-\frac{1}{2}(\beta-1)} f(x) \} \right]_{x=N} \right\},$$

wo abkürzend  $S(N) = \sum_{n=1}^N a_n n^{-\frac{1}{2}(\beta-1)} f(n) - \int_0^N x^{-\frac{1}{2}(\beta-1)} f(x) dR_0(x)$  gesetzt ist,  $f^{(\nu)}(x)$  ( $\nu = 0, 1, \dots, k$ ) Integrale sein mögen, für die  $f(x)$  und  $x^{\nu+1} f^{(\nu+1)}(x)$  ( $\nu = 0, 1, \dots, k$ ) zu  $L^2(0, \infty)$  gehören, und  $\Delta_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \sum_{1 \leq n \leq x} a_n (x-n)^k - \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty (x-t)^{k-1} R_0(t) dt$

bedeutet. Unter ähnlichen Voraussetzungen über  $\psi(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$  und  $R_0(x)$  wie in der zitierten Arbeit wird die Existenz des angeschriebenen Grenzwertes und seine Gleichheit mit jenem Ausdruck bewiesen, der aus ihm entsteht, wenn die Funktion  $f(x)$  durch die ihr vermöge

$$\int_0^x g(y) y^{\frac{1}{2}(\beta-1)} dy = x^{\frac{1}{2}(\beta-1)} \int_0^\infty \frac{\chi_{\frac{1}{2}\beta}(xy)}{y} f(y) dy$$

und

$$\chi_{\frac{1}{2}\beta}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\psi\{\frac{1}{2}(\beta+1)-s\}}{\psi\{\frac{1}{2}(\beta-1)+s\}} \frac{x^{1-s}}{\frac{1}{2}(\beta+1)-s} ds$$

zugeordnete Transformierte  $g(x)$  ersetzt wird. Hieraus werden dann durch Rieszsche Mittelbildung ähnliche Aussagen auch für den Ausdruck

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{k+1} n^{-\frac{1}{2}(\beta-1)} f(n) - \int_0^N \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{k+1} x^{-\frac{1}{2}(\beta-1)} f(x) dR_0(x) \right\}$$

gewonnen, vorausgesetzt, daß die Annahmen über  $f(x)$  auch noch für  $\nu = 0, 1, \dots, 2k-1$  zutreffen. Auch unstetige Funktionen  $f(t)$  sind in gewissem Umfange zulässig. Hierzu folgen Beispiele, die z. T. auf bereits von Wilton gefundene Ergebnisse führen.

Schoblik (Brünn).

**Stachó, Tibor von:** Randsingularität Laplacescher Transformierten. Mh. Math. Phys. **48**, 408—418 (1939).

Durch „sinngemäße aber keineswegs triviale“ Übertragung der Beweisordnung des bekannten Fabryschen Satzes (E. Landau, Darstellung und Begründung einiger



neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. S. 76—86. Berlin 1929) über die Nichtfortsetzbarkeit von  $\sum_0^\infty a_n x^n$  über  $x = 1$ , wenn  $a_n = |a_n| e^{\alpha_n i}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0$  ist, beweist Verf.: Sei  $a(t) = |a(t)| e^{\alpha(t)i}$  integrierbar in jedem endlichen Intervall,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\alpha(t)}{dt} \lg t = 0$  und  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} a(t) dt$  konvergent für  $R(s) > 0$ . Dann ist  $s = 0$  singuläre Stelle von  $f(s)$ .  
V. G. Avakumović (Beograd).

Vignaux, J. C.: Über die Transformation von Beltrami und Poincaré und die Verallgemeinerung der Riemannschen Formel. An. Soc. Ci. Argent. 126, 161—187 (1938) [Spanisch].

Unter dem Beltrami-Poincaréschen Bilde einer in einem Gebiete  $D$  der komplexen Veränderlichen  $v = \xi + i\eta$  beschränkten und integrierbaren Funktion  $\varphi(v)$  versteht Verf. das Integral (B.-P. I.)

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v} d\omega, \quad d\omega = d\xi d\eta.$$

Außerhalb von  $D$  erweist er  $f$  als eine ganze Funktion von  $z$ , deren Ableitungen man durch Ableitung unter dem Integralzeichen erhält. Er ermittelt sodann die Grundeigenschaften der Abbildung und gewinnt im besonderen die Dingfunktion des Produktes zweier Funktionen  $f(z)$ ,  $g(z)$ . Verf. formt das B.-P. I. in ein einfaches Laplacesches Integral um; er verallgemeinert das Momentenproblem auf das B.-P. I.; er entwickelt  $f(z)$  in eine Fakultätenreihe. Weiter betrachtet er Funktionen-Familien und zeigt: der Gesamtheit der in  $D$  beschränkten Dingfunktionen  $\varphi(v)$  gehört eine z. B. in  $D$  normale Familie von Bildern  $f(z)$  zu. Einer Folge von Dingfunktionen, die gleichmäßig gegen  $\varphi(v)$  streben, entspricht eine Folge von Bildern, die gleichmäßig gegen  $f(z)$  streben. Zum Schlusse verallgemeinert Verf. die Riemannsche, auf eine ganze Funktion  $f(z)$  bezügliche Umkehrformel auf den Fall, daß  $f(z)$  in  $D$  eine stetige Flächen-Ableitung besitzt.  
Koschmieder (Graz).

### **Funktionalanalysis, Funktionalräume, Ergodenprobleme:**

Köthe, Gottfried: Das Reziprokentheorem für zeilenabsolute Matrizen. Mh. Math. Phys. 47, 224—233 (1939).

Eine zeilenabsolute Matrix  $\mathfrak{A}$  (Matrix mit abzählbar vielen Zeilen und Spalten und mit gleichmäßig beschränkten Zeilenbetragssummen) heißt stark nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl  $m > 0$  gibt, so daß für alle Punkte  $E$  des Raumes  $\sigma_\infty$  [Raum aller Punkte  $E = (x_1, x_2, \dots)$  mit beschränkten Koordinaten] gilt

$$|\mathfrak{A}_E| \geq m |E|.$$

Die zugrunde liegende Metrik  $|E| = \sup_i |x_i|$  macht  $\sigma_\infty$  zu einem vollständigen metrischen Raum, in dem der Grenzstellensatz gilt. Verf. beweist das folgende Reziprokentheorem: Eine zeilenabsolute Matrix  $\mathfrak{A}$  besitzt dann und nur dann eine linke zeilenabsolute Reziproke, wenn  $\mathfrak{A}$  stark nach unten beschränkt ist. Der Beweis enthält verschiedene Sätze, die für die Theorie der metrischen Räume von selbständigem Interesse sind. So wird gezeigt, daß in einem metrischen vollkommenen Raum jede schwach abgeschlossene Menge schwach topologisch abgeschlossen ist. Als Folgerung ergibt sich ein Satz von St. Banach. Für das Reziprokentheorem werden noch äquivalente sowie schärfere Formulierungen angegeben.  
H. Hadwiger (Bern).

Rothe, Erich: Topological proofs of uniqueness theorems in the theory of differential and integral equations. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 606—613 (1939).

Für die Abbildung  $f(\xi) = \xi + \mathfrak{F}(\xi)$  einer Kugel  $V$  mit dem Rand  $S$  (Sphäre) in einem Banachschen Raum mit vollstetiger  $\mathfrak{F}(\xi)$  beweist Verf., daß die Gleichung  $f(\xi) = \eta_0$  eine und nur eine Lösung in  $V$  besitzt, wenn folgende Voraussetzungen bestehen: a) Die Ordnung von  $\eta_0$  in bezug auf das Bild von  $S$  (dies. Zbl. 18, 133)  $= \pm 1$ .

b) Je zwei Lösungen  $\xi'$  und  $\xi''$  von  $\dot{f}(\xi) = \eta_0$  lassen sich durch eine stetige Kurve  $\xi = \xi_0(t)$  derart verbinden, daß eine kleine Umgebung jedes Punktes  $\xi_0(t)$  durch  $f$  eindeutig transformiert wird. Die Behauptung gilt auch, wenn b) ersetzt wird durch: b') Je zwei Lösungen  $\xi'$  und  $\xi''$  von  $\dot{f}(\xi) = \eta_0$  lassen sich durch eine stetige Kurve derart verbinden, daß  $\dot{f}(\xi)$  längs ihr ein nicht singuläres stetiges Differential besitzt (umkehrbar stetige lineare Operation). Als Anwendung werden Integralgleichungen der Form

$$u_i(s) + \int_B f_i(s, t, u_1(t), \dots, u_n(t)) dt = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

behandelt.

M. Nagumo (Osaka).

**Hyers, D. H.:** Pseudo-normed linear spaces and Abelian groups. Duke math. J. 5, 628—634 (1939).

A linear topological space (l. t. sp.) is a Hausdorff space in which the operations  $x + y$  and  $\alpha x$  ( $\alpha$  a real number) are continuous. A partially ordered (p. o.) set  $D$  is said strongly p. o. if (I)  $a > b$  implies  $b \not> a$ , (II)  $a > b$ ,  $b > c$  imply  $a > c$ , (III) given any  $a, b$ , there exists a  $c$  such that  $c \geq a$ ,  $c \geq b$ . — The author says that the linear space  $L$  is pseudo-normed with respect to the strongly p. o. set  $D$ , if there exists a real valued function  $n(x, d)$  on  $L \times D$  satisfying the following postulates: (I)  $n(x, d) \geq 0$ , if  $n(x, d) = 0$  for all  $d \in D$  then  $x$  is the zero of  $L$ ; (II)  $n(\alpha x, d) = |\alpha| n(x, d)$  for all real  $\alpha$ ; (III) given  $\varepsilon > 0$ ,  $e \in D$ , there exist  $\delta > 0$ ,  $d \in D$  such that  $n(x, d) < \delta$  and  $n(y, d) < \delta$  imply  $n(x + y, e) < \varepsilon$ ; (IV)  $n(x, d) \geq n(x, e)$  whenever  $d > e$ . [Generalisation of a notion due to J. v. Neumann (cf. this Zbl. 11, 164—165). — Putting  $U(d, \alpha) = E_x[n(x, d) < \alpha]$ ,  $d \in D$ ,  $\alpha > 0$ , the system of “neighborhoods”  $U(d, \alpha)$  defines a topology in  $L$  with respect to which  $L$  is a l. t. sp. Conversely, given any l. t. sp.  $L$ , there exists a strongly p. o. set  $D$  and a pseudonorm  $n(x, d)$  of  $L$  with respect to  $D$  such that the topology defined by  $n(x, d)$  is equivalent to the given one. — The notion of the pseudo-norm may be extended also to more general (additively written) Abelian groups. The postulates (I) and (IV) are the same, (II) is postulated for integers  $\alpha$ , while (III) gets the following form: given  $\varepsilon > 0$ ,  $e \in D$ , there exist  $\delta > 0$ ,  $d \in D$  such that  $n(x, d) < \delta \nu$ ,  $n(y, d) < \delta \nu$  imply  $n(x + y, e) < \varepsilon \nu$  for all positive integers  $\nu$ . — The pseudo-norm generates a topology in the group such that the operations  $x + y$  and  $-x$  are continuous. In order that a topological Abelian group  $G$  may be imbedded in a l. t. sp., it is necessary and sufficient that the topology of  $G$  be equivalent to the topology generated by any pseudo-norm  $n(x, d)$  of  $G$ . Béla de Sz. Nagy (Szeged).

**Šilov, G.:** Ideals and subrings of the ring of continuous functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 7—10 (1939).

$S$  sei ein kompakter metrisierbarer Raum,  $C(S)$  der Ring der komplexen, stetigen Funktionen  $\alpha(x)$  auf  $S$ ;  $C(S)$  ist ein topologischer Ring hinsichtlich der gleichmäßigen Konvergenz der  $\alpha(x)$ . Jedes Ideal in  $C(S)$  ist Hauptideal. Ordnet man jedem Ideal die Menge aller Punkte zu, auf denen alle Funktionen des Ideals verschwinden, so erhält man eine eindeutige Zuordnung der teilweise geordneten Menge aller Ideale von  $C(S)$  auf die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von  $S$ . Daraus folgt, daß zwei Räume  $S$  und  $S_1$  dann und nur dann homöomorph sind, wenn  $C(S)$  und  $C(S_1)$  stetig isomorph sind. Auch für gewisse abgeschlossene Teilringe von  $C(S)$  läßt sich eine eindeutige Zuordnung zu den stetigen Zerlegungen von  $S$  feststellen (entsprechende Sätze auch bei M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 41, 375—481 (1937); dies. Zbl. 17, 135].

G. Köthe (Münster i. W.).

**Gelfand, I., and A. Kolmogoroff:** On rings of continuous functions on topological spaces. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 11—15 (1939).

Die Ergebnisse der vorstehend ref. Note werden verallgemeinert.  $S$  sei ein total regulärer Raum,  $C(S)$  der Ring aller stetigen reellen Funktionen auf  $S$ ,  $C'(S)$  der aller beschränkten Funktionen aus  $C'(S)$ . Die Maximalideale in  $C(S)$  bzw.  $C'(S)$  bilden nach Topologisierung nach dem Vorbild von M. H. Stone (wie oben) Räume  $\gamma(S)$  bzw.  $\gamma'(S)$ . Ist  $S$  bikompakt, so ist  $\gamma(S) = \gamma'(S)$  homöomorph zu  $S$ , zwei bikompakte



Räume  $S$  und  $S_1$  sind dann und nur dann homöomorph, wenn  $C(S)$  und  $C(S_1)$  algebraisch isomorph sind. Im allgemeinen Fall läßt sich  $S$  nach Čech [Ann. of Math., II. s. 38, 823—844 (1937); dies. Zbl. 17, 428] in einen bikompakten Raum  $\beta S$  eindeutig einbetten. Es ist nun  $C'(S)$  isomorph  $C'(\beta S)$  und  $\gamma'(S)$  homöomorph zu  $\beta S$ . Auch  $\gamma(S)$  ist homöomorph  $\beta S$ . Erfüllen die Räume  $S$  und  $S_1$  das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so sind sie dann und nur dann homöomorph, wenn  $C'(S)$  und  $C'(S_1)$  oder wenn  $C(S)$  und  $C(S_1)$  isomorph sind. G. Köthe (Münster i. W.).

Yosida, Kôzaku, and Shizuo Kakutani: Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 165—168 (1939).

Ist  $T = T(P)$  eine eindeutige Abbildung eines Raumes  $\Omega$  auf sich, bei der ein Lebesguesches Maß  $m$  invariant bleibt, und ist  $f(P)$  reell und  $m$ -summierbar über  $\Omega$ , so gilt, wie die Verff. zeigen, folgende Ungleichung. Setzt man

$$f^*(P) = \text{ob. Gr.} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(P))$$

und bezeichnet man mit  $E^* = E^*(\alpha)$  die Menge der Punkte mit  $f^*(P) > \alpha$ , so gilt

$$\int_{E^*} f(P) dm \geq \alpha m(E^*).$$

Eine analoge Ungleichung ergibt sich für die untere Grenze, wenn man  $-f$  statt  $f$  betrachtet. Die Ungleichung ist eine Verschärfung einer Ungleichung, die von N. Wiener aufgestellt und zum Beweis einer Verschärfung des Birkhoffschen Ergodensatzes benötigt wurde [N. Wiener, The ergodic theorem. Duke math. J. 5, 1 (1939); dies. Zbl. 21, 235]. — Die Ungleichung wird genau so bewiesen wie die Ungleichung, auf welche Birkhoff in seinem grundlegenden Beweis des Ergodensatzes geführt wurde. Die Verff. machen in ihrem Beweise von der Wendung Gebrauch, welche Kolmogoroff dem Birkhoffschen Beweise gegeben hatte. E. Hopf (Leipzig).

Oxtoby, J. C., and S. M. Ulam: On the existence of a measure invariant under a transformation. Ann. of Math., II. s. 40, 560—566 (1939).

Let  $E$  be a topological space and let  $m(A)$  be a completely additive measure function,  $0 \leq m(A) \leq \infty$ , defined at least for all Borel sets in  $E$  and not identically zero. The measure is finite if  $m(E) < \infty$ . The measure is invariant under an automorphism  $T$  of  $E$  (i. e., a one-to-one bicontinuous transformation of  $E$ ) if  $m(TA)$  is defined and equal to  $m(A)$  whenever  $m(A)$  is defined. The problem is the following: given an automorphism (or a family of automorphisms), does there exist an invariant measure? The authors consider the case of complete separable metric spaces  $E$  and give a complete solution of the above problem. Their main results read as follows: — In order that  $T$  admit a finite invariant measure in  $E$  it is necessary and sufficient that for some point  $p$  and compact set  $C \subset E$  we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_0(T^k p) > 0 \quad (*)$$

where  $f_0$  is the characteristic function of  $C$  (theorem 1). The necessity is derived from the Birkhoff ergodic theorem. To prove the sufficiency, the authors make use of a notion of generalised limit  $\text{Lim} (\xi_n)$  due to Mazur and Banach, defined for all bounded sequences  $(\xi_n)$  of real numbers (cf. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsaw 1932. p. 27). — In order that  $T$  admit a finite invariant measure which is zero for points, it is necessary and sufficient that one of the following conditions hold: a)  $T$  has non-denumerably many periodic points, b) there exists a compact set  $C$  consisting of non-periodic points and a  $p$  with the property (\*). — Let us now suppose also that  $E$  is dense in itself. If we admit also infinite measures then each automorphism  $T$  possesses an invariant measure, which is zero for points, positive for non-void open sets and such that there exists a set  $A_0$  of finite measure whose images  $T^k A_0$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) are all disjoint and  $E - \sum_k T^k A_0$  is of finite measure. — Theorem 1

may be extended also to the case of a one-parameter group of automorphisms  $T_\lambda$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ), such that  $T_\lambda T_\mu x = T_{\lambda+\mu} x$ ,  $T_0 x = x$ , and with the property:  $T_\lambda x$  is Borel-measurable in  $\lambda$  for each fixed  $x$ . One has only to replace (\*) by the condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_0(T_\lambda p) d\lambda > 0. \quad (**)$$

[If  $E$  is compact, (\*) resp. (\*\*) is trivially satisfied by  $C=E$  and by an arbitrary point  $p$ . Thus the above theorems contain the previous theorems of Kryloff and Bogoliouboff (Ann. of Math. (2) 38, 65—113 (1937), this Zbl. 16, 86) concerning the existence of finite invariant measures in compact spaces.] *Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Izumi, Shin-ichi:** A non-homogeneous ergodic theorem. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 189—192 (1939).

Verf. beweist folgendes.  $T$  sei eine maßtreue Abbildung eines Raumes auf sich. Das Maß des Raumes sei endlich. Ist  $T$  vom Mischungstyp und ist die Konvergenz gegen Mischung genügend rasch, so konvergiert

$$\sum_1^{\infty} \frac{f(T^{\nu}P)}{\nu}$$

in fast allen Punkten  $P$ , wenn  $f$  zu  $L^2$  gehört und das Raummittel von  $f(P)$  gleich Null ist. Der zweite Satz des Verf. folgt direkt aus dem Ergodensatz. *E. Hopf.*

**Bebutoff, M., et W. Stepanoff:** Sur le changement du temps dans les systèmes dynamiques possédant une mesure invariante. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 217—219 (1939).

$T_t P, T_s T_t = T_{t+s}$ , sei eine stetige stationäre Strömung in einem separablen metrischen Raum mit dem invarianten Lebesgueschen Maß  $\mu$ . Unter den Umgebungen eines beliebigen Punktes  $P$  existiere stets eine mit endlichem  $\mu$ . Die Zeittransformation  $d\tau = \lambda(P) dt$  transformiert die Strömung  $T_t P = S_{\tau} P$ ,  $\tau = \int_0^t \lambda(T_t P) dt$ .

$\lambda$  wird positiv und stetig vorausgesetzt. Ferner sei stets  $\tau(+\infty) = +\infty$ ,  $\tau(-\infty) = -\infty$ . Verff. beweisen, daß  $S_{\tau}$  das invariante Maß  $\mu^*$ ,  $d\mu^* = \lambda(P) d\mu$  besitzt. Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines wohlbekannten Satzes über die Transformation der Integralinvariante eines dynamischen Systems durch eine differentielle Zeittransformation. *E. Hopf (Leipzig).*

**Dunford, Nelson:** A mean ergodic theorem. Duke math. J. 5, 635—646 (1939).

Verf. beschäftigt sich mit Verallgemeinerungen des statistischen Ergodensatzes auf mehrparametrische Gruppen, sowohl Operatorengruppen als auch Gruppen von Punkttransformationen. An die Stelle von  $T_t, T_s T_t = T_{t+s}$ , tritt eine Gruppe  $T_{\alpha}, T_{\alpha} T_{\beta} = T_{\alpha+\beta}$ , wo  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  die Vektoren des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Vektorraumes bedeuten. In  $T_{\alpha} f$  durchläuft das Argument  $f$  die Elemente eines linearen Raumes. Verf. gibt verschiedene Bedingungen an, unter welchen

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r^n} \int_{I_r} T_{\alpha} f d\alpha$$

im Sinne der zugrunde gelegten Norm des linearen Raumes der  $f$  existiert. Dabei ist  $I_r$  ein achsenparalleler Kubus der Seitenlänge  $r$ ,  $d\alpha = \prod da_i$ . Ist  $S_{\alpha} P, S_{\alpha} S_{\beta} = S_{\alpha+\beta}$  eine stetige Gruppe von Punkttransformationen eines Raumes  $\Omega$  in sich, welche ein Lebesguesches Maß  $m$  in  $\Omega$  invariant lassen, und definiert man, wenn  $f = f(P)$  eine Funktion in  $\Omega$  ist,  $T_{\alpha} f = f(S_{\alpha} P)$ , so existiert der Limes im Sinne von  $L_1$ -Konvergenz, wenn  $f$  zu  $L_1$  gehört. Die Voraussetzungen und Aussagen können wie im Falle  $n=1$  variiert werden. *E. Hopf (Leipzig).*

**Kakutani, Shizuo:** Mean ergodic theorem in abstract ( $L$ )-spaces. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 121—123 (1939).

$x, y, \dots$  seien Elemente eines halbgeordneten Banachschen Raumes. Die Norm in diesem Raume sei additiv für positive Elemente.  $T$  sei ein linearer Operator in diesem Raum. Die Normen  $\|T^n\|$  seiner Iterierten seien gleichmäßig beschränkt. Die Elemente

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_1^n T^i(x)$$



seien für beliebiges  $x$  im Sinne der Ordnung nach oben beschränkt. Unter diesen Voraussetzungen skizziert Verf. einen Beweis dafür, daß zu jedem  $x$  ein  $y$  gehört, so daß  $\|x_n - y\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Unter engeren Voraussetzungen hatte vorher G. Birkhoff schwache Konvergenz von  $x_n$  bewiesen. Halbgeordnete Banachräume hatte G. Birkhoff zur abstrakten Begründung der Grenzwertsätze bei Markoffschen Ketten eingeführt [vgl. G. Birkhoff, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 154, 159 (1938); dies. Zbl. 18, 264].

E. Hopf (Leipzig).

Hilmy, Heinrich: Sur le théorème ergodique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 213—216 (1939).

Der vom Verf. bewiesene Satz ist nicht neu. Das Ergebnisheft „Ergodentheorie“ des Ref. (§ 14), das vom Verf. zitiert wird, gibt viel weitergehende Auskunft über den vom Verf. betrachteten Fall  $m(\Omega) = \infty$ .

E. Hopf (Leipzig).

### Variationsrechnung:

Hölder, Ernst: Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Variationsrechnung. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 49, Abt. 1, 162—178 (1939).

Ist ein Variationsproblem

$$\int f(t, x_i, p_i) dt = \text{Min}, \quad p_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

gegeben, so führt man bekanntlich mit Vorteil die Hamiltonsche Funktion  $\varphi(t, x_i, \pi_i)$  ein, die aus  $f$  mit Hilfe der Legendreschen Transformation

$$f_{p_i} = \pi_i; \quad f + \varphi = p_i \pi_i \quad (2)$$

berechnet wird. Das Studium der Variationsprobleme für mehrfache Integrale hat gelehrt, daß auch zwei weitere Funktionen  $\bar{F}(t, x_i, P_i)$ ,  $\bar{\Phi}(t, x_i, \Pi_i)$ , die mit den vorhergehenden durch das Gleichungssystem

$$P_i = -\frac{\pi_i}{\varphi}, \quad \bar{F} = -\frac{1}{\varphi}; \quad \Pi_i = -\frac{\pi_i}{\Phi}, \quad \bar{f} = -\frac{1}{\Phi} \quad (3)$$

verknüpft, und mit Hilfe dieses Gleichungssystems definiert werden, sehr eng mit dem Variationsproblem (1) zusammenhängen. Der Autor hat nun die Entdeckung gemacht, daß die Funktion  $\bar{F}$  gedeutet werden kann als die Liesche charakteristische Funktion der eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen, deren Bahnkurven mit den Extremalen des Variationsproblems (1) zusammenfallen, und für welche der Zuwachs ihres kanonischen Parameters längs einer Bahnkurve durch den entsprechenden Wert des Integrals (1) berechnet wird. Alle anderen Größen, die in (2) oder (3) vorkommen, besitzen eine ähnliche geometrische Bedeutung. Hierdurch wird ein recht verwickelter Tatsachenbestand endgültig aufgeklärt. — Diese Einsicht kommt auch den Variationsproblemen für mehrfache Integrale zugute: Das schwierige Problem der Einbettung einer Extremalfläche in ein geodätisches Feld kann jetzt, wie am Ende der Arbeit gezeigt wird, nicht nur mit einer geometrisch sehr durchsichtigen Methode behandelt werden, sondern auch der Rechenapparat wird entsprechend vereinfacht. Die Arbeit ist leider wegen der Knappheit der Ausdrucksweise recht mühsam zu lesen, und einige der wertvollsten Hinweise befinden sich in den Anmerkungen.

C. Carathéodory (München).

Graves, Lawrence M.: The Weierstrass condition for multiple integral variation problems. Duke math. J. 5, 656—660 (1939).

La condizione necessaria di Weierstrass per l'esistenza dell'estremo di un integrale multiplo ha formato oggetto di numerose ricerche da parte di diversi A. (McShane, Cinquini, Caccioppoli e Scorza-Dragoni). Nella presente Nota l'A. tratta un caso molto particolare, limitandosi a considerare classi di ipersuperfici, definite da funzioni continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine e che hanno un contorno fissato, e ritrova, per questo caso particolare, la condizione di Weierstrass, mediante la generalizzazione di un suo procedimento già seguito (questo

Zbl. 10, 120) per gli integrali semplici. Il risultato, ottenuto nel § 1 per gli integrali in forma ordinaria, viene esteso nel § 2 a quelli in forma parametrica. S. Cini.

### Funktionentheorie:

Privaloff, I.: Sur les intégrales du type de Cauchy. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 23, 859—863 (1939).

Es sei  $K$  eine geschlossene Kurve in der komplexen  $x$ -Ebene,  $x_0$  ein Punkt auf  $K$ ,  $f(x)$  eine innerhalb  $K$  definierte Funktion. Es wird das Verhalten des Integrals

$$\int_K \frac{f(x)}{x - z} dx$$

untersucht, wenn  $z$  auf einer gegebenen Kurve innerhalb  $K$  gegen  $x_0$  strebt. Kamke.

Koppfels, Werner von: Konforme Abbildung besonderer Kreisbogenvierecke. J. reine angew. Math. 181, 83—124 (1939).

Verf. betrachtet die Klasse der Kreisbogenvierecke, deren Winkel ungerade Vielfache von  $\pi/2$  sind, und löst für dieselben das Abbildungsproblem einschließlich des Parameterproblems vollständig. Geschickte Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen führt den Verf. dabei insbesondere auf bisher nicht behandelte Differentialgleichungen mit doppelt periodischen Koeffizienten, die durch die gewonnene Abbildungsfunktion lösbar werden. Es wird insbesondere die Abhängigkeit der beiden Parameter der betreffenden Differentialgleichungen von den geometrischen Konstanten des Kreisbogenvierecks genau verfolgt. Zusammenfassend seien folgende Zusammenhänge hervorgehoben: Das Parameterproblem für die genannten Kreisbogenvierecke ist identisch mit dem Parameterproblem für gewisse Geradenpolygone mit vier Ecken im Endlichen. Das Parameterproblem dieser Geradenpolygone hängt innigst zusammen mit den Lösungen Pochhammerscher Differentialgleichungen. Diese Lösungen sind nämlich die bestimmten Schwarzschen Polygonabbildungsintegrale. Die Abbildungsfunktionen der betrachteten Kreisbogenvierecke sind Exponentialfunktionen mit dem Schwarzschen Polygonabbildungsintegral im Exponenten und stellen sich dar als Quotienten der Lösungen linearer Differentialgleichungen II. Ordnung mit vier Verzweigungspunkten und doppeltperiodischen Koeffizienten. Graeser (Göttingen).

Robertson, M. S.: The variation of the sign of  $V$  for an analytic function  $U + iV$ . Duke math. J. 5, 512—519 (1939).

In Weiterentwicklung von Sätzen von Cartwright (dies. Zbl. 10, 362) und Biernacki (dies. Zbl. 14, 319) beweist der Verf. folgende Theoreme: Es sei  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = U + iV$  regulär in  $|z| < 1$ .  $V$  wechsle sein Vorzeichen höchstens  $2p$ -mal auf  $|z| = r$ , für jedes  $r$  mit  $0 < 1 - \delta < r < 1$ , dann ist

$$|a_n| < A(p) \mu_p n^{2p}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{n^{2p}} \right| \leq 2 \sum_{k=0}^p \frac{|a^k|}{(p+k)!(p-k)!},$$

$$|f(re^{i\theta})| < A(p) \mu_p (1-r)^{-2p-1}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < A(p) \mu_p (1-r)^{-2p},$$

wobei  $\mu_p = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_p|\}$ . Ist noch  $f(z)$  reell auf der reellen Achse, so gilt sogar  $|a_n| < A(p) \mu_p n^{2p-1}$ ,

$$|f(re^{i\theta})| < A(p) \mu_p (1-r)^{-2p}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < A(p) \mu_p (1-r)^{-2p}.$$

In beiden Sätzen können die Exponenten von  $n$  und  $1-r$  nicht mehr herabgedrückt werden. Beim Beweis wird zuerst der Fall  $\mu_{p-1} = 0$  betrachtet. Es wird  $f(z)$  mit einer regulären Funktion  $F(z)$  mit positivem Realteil in Zusammenhang gebracht. Beim allgemeinen Fall muß eine Funktion mit einem Pol bei 0 der Ordnung  $\leq p$  herangezogen werden, deren Realteil nicht mehr im ganzen Einheitskreis positiv ist.

Hlawka (Wien).



**Ballieu, Robert:** Contribution à l'étude de l'univalence locale des fonctions holomorphes. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 59, 53—103 (1939).

Verf. erweitert die zuerst von Montel (dies. Zbl. 15, 70; 17, 24) für den Einheitskreis untersuchten Begriffsbildungen für beliebige Gebiete  $\mathfrak{G}$ ; er findet es tunlich, neben die wörtliche Übertragung [ $f(z)$  heißt in  $\mathfrak{G}$  lokal schlicht vom Radius  $\varrho$ , wenn es in jeder offenen Kreisscheibe vom Radius  $\varrho$  schlicht ist, die ganz in  $\mathfrak{G}$  liegt] die folgende zu setzen:  $f(z)$  heißt in  $\mathfrak{G}$  (strikt) lokal schlicht zum Modul  $\varrho$  (kurz: l. s.  $\varrho$ ), wenn es in jeder (abgeschlossenen) offenen Kreisscheibe vom Radius  $\leq \varrho$  schlicht ist, die ganz in  $\mathfrak{G}$  liegt; und lokal schlicht in  $\mathfrak{G}$  schlechthin, wenn es zu jedem inneren Teilgebiet  $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$  einen endlichen Modul  $\varrho'$  gibt. — Im ersten Teil der Arbeit wird die Übertragung dieser Begriffe aus einer Folge in die Grenzfunktion studiert, dann die Umkehrung solcher Sätze; für diesen Rückschluß von der Grenzfunktion auf die Näherungen erweist sich der Begriff strikt l. s.  $\varrho$  als notwendig — im Falle l. s.  $\varrho$  kann für jedes  $\mathfrak{G}$  an Beispielen belegt werden, daß ein Rückschluß nicht möglich ist; der Umfang möglicher Mehrwertigkeit kann aber gefaßt werden. — Eine zweite Gruppe von Sätzen betrifft den maximalen Schlichtheitsmodul  $\varrho_n$  einer Funktion in Gebieten  $\mathfrak{G}_n$ ; streben die  $\mathfrak{G}_n$  wachsend gegen ein Grenzgebiet  $\mathfrak{G}$  (Kern), so gilt zugleich  $\varrho_n \rightarrow \varrho$ , worunter der maximale Modul von  $\mathfrak{G}$  zu verstehen ist. — Drittens wird die oben erwähnte lokale Schlichtheit vom Radius  $\varrho$  untersucht. Diese Begriffsbildung zeichnet einige Klassen von Gebieten aus, z. B. solche,  $d(r)$ , bei denen jeder Randpunkt einer Kreislinie vom Radius  $r$  angehört, deren Inneres ganz in  $d(r)$  liegt; oder  $\bar{D}(r)$ , wo jeder innere Punkt zugleich einer offenen Kreisscheibe vom Radius  $r$  angehört, die ganz in  $D(r)$  liegt. Im III. Teil der Arbeit werden solche Gebiete eingehender auf ihre (Rand-) Struktur untersucht. — Der II. Teil der Arbeit ist, bei festem  $\varrho$ , einem Studium der Menge  $\mathfrak{E}_\varrho$  aller l. s.  $\varrho$ -Funktionen gewidmet, bzw. der durch Normierung  $f(z) = z + \dots$  im Einheitskreis  $|z| < 1$  entstehenden Menge  $E_\varrho$ ; sie ist kompakt, d. h. sie enthält jede Grenzfunktion. Es sei

$$M_n(r, \varrho) = \lim_{E_\varrho} \max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)|.$$

Für diese Funktionen stellt Verf. einige interessante Eigenschaften und Ungleichungen fest. Z. B. ist  $\log M_n(r, \varrho)$  bei festem  $\varrho$  konvex in  $\log r$ ; anderseits  $M_n(r, \varrho)$  bei festem  $r$  stetig in  $\varrho$ , und  $\varrho^{n-1} M_n(r\varrho, \varrho)$  monoton wachsend in  $\varrho$ ; für Vergleich verschiedener Ableitungen gilt  $M_n(r, \varrho) \leq k^{n-1} M_n(0, k\varrho) M_1(r, \varrho)$  für jedes  $k$ ; endlich  $|f''(z) : f'(z)| < 4\varrho^{-1} - \Delta(\varrho)$  sobald  $|z| \leq 1 - \varrho$  ist;  $\Delta(\varrho)$  bezeichnet eine nur von  $\varrho$  abhängige Konstante.

Ullrich (Gießen).

**Töpfer, Hans:** Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen, insbesondere von  $\sin z$  und  $\cos z$ . Math. Ann. 117, 65—84 (1939).

$F(z) = F_1(z)$  sei ganz transzendent,  $F_\nu(z) = F(F_{\nu-1}(z))$  sei die Folge der Iterierten,  $\mathfrak{F}$  die Menge der Punkte, in denen diese Folge keine Normalschar bildet,  $\mathfrak{G}$  eines der Teilgebiete, die  $\mathfrak{F}$  aus der Vollebene ausschneidet. Eine Punktmenge  $\mathfrak{M}$  heißt invariant, wenn sie durch  $F(z)$  in  $F(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$  abgebildet wird, und vollständig invariant im Falle  $F(\mathfrak{M}) \equiv \mathfrak{M}$ . — Verf. kann den grundlegenden Sätzen von Fatou über  $\mathfrak{F}$  einige bemerkenswerte Ergänzungen anfügen; sie betreffen: das Eintreten von einfachem Zusammenhang bei Gebieten  $\mathfrak{G}_i$ . Die Höchstzahl vollständig invarianter Gebiete ist 2 (was aus dem einfachsten Fall der Ahlforsschen Scheibensätze folgt; vgl. dies. Zbl. 6, 262; 12, 172, IIb);  $\mathfrak{F}$  enthält kein isoliertes Jordansches Kurvenstück; ein abstoßender Fixpunkt  $a$  mit nicht-positivem Multiplikator  $F'(a) = Re^{i\Phi}$ ,  $0 < \Phi < 2\pi$ ,  $R > 1$ , ist in  $\mathfrak{G}$  nur auf „unendlich spiralig gewundenen Wegen“ erreichbar, d. h.  $\arg\{z(t) - a\} \rightarrow \pm \infty$ . — Verf. behandelt dann ausführlich die Iteration von  $\sin z$  und  $\cos z$  und bestimmt die (hier wie im allgemeinen) sehr verwickelte Struktur der zugehörigen Menge  $\mathfrak{F}$ ; die beiden Anziehungsgebiete  $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1$  des rational indifferenten Fixpunktes  $z = 0$  (bei  $\sin z$ ) führen bei Abbildung in den Einheitskreis  $|s| < 1$ ,  $s = S(z)$

auf folgenden Fall der Schröderschen Funktionalgleichung

$$S(\sin z) = \frac{S^2(z) + k}{kS^2(z) + 1}.$$

Auch die Fatousche Iteration von  $e^z$  kann in einem Punkte ergänzt werden. — Anm. d. Ref.: Es empfiehlt sich nicht, kompakt an Stelle von normal in der (komplexen) Analysis einzuführen. (Vgl. z. B. vorsteh. Ref.) *Ullrich* (Gießen).

● **Dieudonné, J.:** *La théorie analytique des polynomes d'une variable (à coefficients quelconques)*. Mém. Sci. math. Fasc. 93, Paris: Gauthier-Villars 1938. 76 pag. Frs. 20.—

Das Heft behandelt die bekannten Sätze über Nullstellenverteilung von Polynomen einer komplexen Veränderlichen und mit beliebigen komplexen Koeffizienten in ihrer Eigenschaft als spezielle analytische Funktionen. Teil I betrifft die Beträge (und das wenige was man von den Argumenten weiß) in Abhängigkeit von bekannten Koeffizienten, Teil II die Lagebeziehungen zwischen den Nullstellen von Polynomen (bzw. rationalen Funktionen) und denen ihrer Ableitungen sowie Aussagen über Linearverbindungen rationaler Funktionen. Verf. hofft durch seine Zusammenfassung zu Fortschritten und zur Abrundung des Problemkreises anzuregen; in der Tat scheint die Theorie insbesondere in der Richtung noch viel zu versprechen, daß durch Grenzübergang zu transzendenten Funktionen Anschluß an deren weitergehend bekannte Wertverteilungseigenschaften zu gewinnen ist; diese Zugänge sind auch für sehr einfache Wertverteilungssätze (z. B. den Picard-Landauschen Satz) noch nicht gebahnt.

*Ullrich* (Gießen).

**Obrechhoff, Nikola:** *Sur les zéros de quelques classes de fonctions*. Comment. math. helv. 12, 66—70 (1939).

Mit Benützung von Laguerreschen Sätzen verallgemeinert Verf. einen Satz von G. Pólya folgendermaßen: Ist die ganze transzendente Funktion  $f(z)$  die Grenzfunktion einer Folge von Polynomen mit lauter positiven (bzw. reellen) Nullstellen, so

hat  $y^{(n)}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$  {hier bedeutet  $y^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [x^p f(x^q)]$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$ } lauter nichtnegative (bzw. reelle) Nullstellen für  $n < p + 1$ . Sind  $p, q$  beide positiv ganz, so gilt der Satz für alle  $n$ . — Auf Grund dieser Ergebnisse untersucht Verf. die Nullstellenverteilung

von Polynomen, welche in der Form  $\int_{-a}^{+a} F(x) f(z-x) dx$  [ $F(x)$  integrabel,  $f(x)$  Polynom] darstellbar sind.

*E. Egervary* (Budapest).

**Epstein, Leo F.:** *A function related to the series for  $e^{e^x}$* . J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 18, 153—173 (1939).

In der Potenzreihenentwicklung  $e^{e^x} = e \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{K_{\nu}}{\nu!} x^{\nu}$  treten die  $K$ -Zahlen  $K_{\nu}$  auf, die schon mehrfach betrachtet wurden und verwandte Eigenschaften zu den Eulerschen  $E_n$  zeigen; z. B. ist (symbolisch)  $K_{n+1} = (1 + K)^n$ . Verf. studiert die Funktion

$$K(z) = \frac{1}{e} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!},$$

für die  $K(n) = K_n$  bei  $n = 0, 1, \dots$  gilt, und gibt für sie neben einer Reihe von funktionalen Beziehungen, z. B. mit dem Integrallogarithmus, die Potenzreihenentwicklung

$$K(z) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n \quad \text{mit} \quad p_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln \nu)^n}{\nu!},$$

aus der einige interessante Sonderfälle hervorgehen, sowie einen asymptotischen Ausdruck von der Form

$$K(n) \sim \left[ \frac{ne^{1: \ln n}}{\ln n} \right]^n.$$



Die Note enthält weiter eine Reihe von numerischen Angaben (kleine Tafeln) über  $K(z)$  und die Potenzreihenkoeffizienten  $p_n$  sowie Hinweise auf Zusammenhänge, in denen  $K(n)$  bzw.  $K(z)$  schon früher bemerkt und behandelt wurde. Ullrich (Gießen).

**Jørgensen, Vilhelm:** Über die Randableitung einer beschränkten analytischen Funktion nebst einer Anwendung auf den Picardschen Satz. Math. Ann. 116, 658—663 (1939).

Die Existenz der Randableitung  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - 1}{z - 1} = \alpha$  bei Annäherung  $z \rightarrow 1$  im Winkel ist eine nun schon klassische Tatsache der Funktionentheorie. Verf. beschreibt hier viel weitere Gebietsklassen, in denen  $z \rightarrow 1$  rücken darf; in einem Falle sind sogar Randpunkte auf den Einheitskreis zugelassen, im anderen kann  $z$  in einem Kreis gegen 1 rücken, der  $|z| = 1$  in 1 von innen berührt (Orizykel), vorausgesetzt, daß der Häufungsbereich von  $f(z)$  auf  $|z| = 1$  einen passenden  $w$ -Orizykel in  $|w| < 1$  frei läßt. — Im Anschluß daran verschärft Verf. den Picardschen Satz zu folgender Aussage: Für  $\sigma \geq 0$  erfülle  $f(\sigma + it)$  die Voraussetzungen des Phragmén-Lindelöfschen Satzes ( $|f(i, t)| \leq u$ , in  $\sigma > 0$  unbeschränkt, aber regulär), und daneben sei noch  $f(s) \neq 0, 1$ ; dann ist es darstellbar als  $f(s) = e^{cs} g(s)$  mit  $c > 0$  und (für  $\sigma > 0$ )  $u \geq |g(s)| \geq L(cs)$ ;  $L(\sigma)$  ist  $> 0$ , monoton wachsend und unabhängig von  $f(s)$ . Ullrich (Gießen).

**Jørgensen, Vilhelm:** Über ein Korollar zum Picard-Landauschen Satz. Mat. Tidsskr. B 1939, 1—6 [Dänisch].

Auswertung des Landauschen Satzes mit der genauen Caratheodoryschen Schranke und deren elementarer Abschätzung von Ahlfors (dies. Zbl. 18, 410) führt zur Angabe eines gewissen Kreisrings, der von  $w = f(z) = 1 + az^n + \dots$  mit  $a \geq 13m$  mindestens  $m$ -fach überdeckt wird. Der Ton der Arbeit liegt auf dem Wege zum Ergebnis.

Ullrich (Gießen).

**Pfluger, A.:** Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. II. Comment. math. helv. 12, 25—65 (1939).

Für I. vgl. dies. Zbl. 21, 238. Mit Hilfe des dort behandelten Strahltypus  $h(\varphi)$  wird die Hüllkurve der Geradenschar  $x \cos \varphi + y \sin \varphi = h(\varphi)$  gebildet, unter geeigneten Festsetzungen an den Stellen  $\varphi$ , wo nur die einseitigen Ableitungen von  $h(\varphi)$  existieren. Für sie wird eine relative Länge  $\mathfrak{L}(\varphi_1, \varphi_2)$  bzw. bis auf konst. eine Bogenfunktion  $\mathfrak{L}(\varphi)$  durch Abwicklung auf die rollende Schargerade erklärt. Diese Begriffsbildungen erlauben eine geometrische Deutung der Ergebnisse des Teils I; es ist nämlich bei meromorphen Funktionen die Differenz  $N_0(\varphi) - N_\infty(\varphi) = N^*(\varphi)$  der Maßfunktionen von Null- und Polstellenverteilungen im wesentlichen nichts anderes als  $\mathfrak{L}(\varphi)$ , wenn  $\varphi$  den Grenzwert der präzisen Wachstumsordnung bedeutet. So ergeben sich 3 äquivalente Kennzeichnungen der als Strahltypen zulässigen Funktionen  $h(\varphi)$ , und zwar: A.  $h(\varphi)$  ist mit Hilfe einer monoton wachsenden Funktion  $\mathfrak{L}(\varphi)$  und passender Konstanten  $a, b, \varphi_0$  darstellbar als

$$h(\varphi) = a \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) + b \sin \varrho(\varphi - \varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - t) d\mathfrak{L}(t).$$

B.  $h(\varphi)$  erzeugt für passendes  $\varrho > 0$  wie eingangs eine konvexe Hüllkurve, C. für jedes Tripel  $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ ,  $\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu < \frac{\pi}{\varrho}$ ,  $\nu = 1, 2$  gilt die Funktionalgleichung

$$h(\varphi_1) \sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_2) + h(\varphi_2) \sin \varrho(\varphi_1 - \varphi_3) + h(\varphi_3) \sin \varrho(\varphi_2 - \varphi_1) \geq 0.$$

Zu jeder präzisen Wachstumsordnung  $\varrho(r) \rightarrow \varrho$  und jedem  $h(\varphi)$ , das den vorstehenden Kennzeichnungen genügt, gibt es ganze und gebrochene Funktionen mit entsprechender Wertverteilung unter meßbarer Nullstellen- und Polverteilung (vgl. Ref. über I., Schluß). — Der III. Abschnitt der Untersuchung ist der Aufgabe gewidmet, bei Funktionen mit bekanntem regulärem Wachstum des absoluten Betrages das Verhalten des Arguments und weiter die Nullstellenverteilung zu ermitteln; das geschieht gleich für Funktionen, die in einem Winkelraum  $\alpha < \varphi < \beta$  regulär sind. Wird hier (wie schon in früheren Stücken der Abhandlung)  $r e^{i\varphi}$  durch die Werte einer gewissen

analytischen Funktion  $V(z)$  auf der reellen Achse glättend ersetzt, mit  $V(z) \sim e^{i\varphi} V(r)$  für  $z = re^{i\varphi}$ ,  $V(r) \sim re^{(r)}$ , so gilt z. B.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{V(r)} = -\frac{1}{\varrho} h'(\varphi)$$

(nach geeigneten Festsetzungen über die Fortsetzung der Funktion  $\arg f$ ), sowie Erweiterungen dieser Beziehung an den Stellen, wo nur einseitige Ableitungen von  $h(\varphi)$  vorhanden sind. Ferner gilt

$$(*) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V(r)} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d \langle \arg f(re^{i\varphi}) \rangle = \varrho \int_{\varphi'}^{\varphi''} h(t) dt.$$

Funktionen der behandelten Art haben im Winkelraum meßbare Nullstellenverteilung und es gilt für die in I. eingeführte Maßfunktion  $N(\varphi)$

$$2\pi dN(\varphi) = \varrho h(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\varrho} dK(\varphi) = d\Omega(\varphi);$$

darin liegt bei unganzer Wachstumsordnung  $\varrho$  eine Umkehrung der Hauptaussage (Satz 3) aus I. Das Bestehen der Gleichung (\*) für  $\varphi' = \alpha$ ,  $\varphi'' = \beta$  zieht bei einer in  $\alpha < \varphi < \beta$  regulären Funktion von präziser Ordnung  $\varrho(r) \rightarrow \varrho$  das Vorliegen von regulärem Wachstum nach sich. — Im allgemeinen sind  $n(r, 2\pi)$  (vgl. I.) und  $\log n(r)$  zugleich vom Minimaltypus einer präzisen Ordnung; nur für  $\varrho = 1, 2, \dots$ ,  $h(\varphi) = A \cos \varrho\varphi + B \sin \varrho\varphi$  ist eine Abweichung möglich. — Den Schluß bildet eine Übertragung auf  $a$ -Stellenverteilung und eine Betrachtung über das Eintreten eines Borelschen Ausnahmewertes; dann liegen die Borelschen Richtungen unter gleichen Winkeln und alle anderen Werte sind sehr regelmäßig verteilt. *Ullrich* (Gießen).

**Teichmüller, Oswald: Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung.** Deutsche Math. 4, 163—190 (1939).

Der Kern der Arbeit liegt im — methodisch bemerkenswerten — Nachweis einer Defektabschätzung bei gebrochenen Funktionen kleiner Wachstumsordnung  $\omega$  bei bekannter Beschränktheit auf einer Geraden ( $\omega < 1$ ) bzw. einem Halbstrahl ( $\omega < \frac{1}{2}$ ) durch  $z = 0$ ; dann ist der Defekt der Sorte  $\infty$ :

$$\delta(\infty) \leq 1 - \cos \frac{\pi \omega}{2} \quad \text{bzw.} \quad \leq 1 - \cos \pi \omega.$$

Durch Konstruktion einfacher Beispiele mittels kanonischer Produkte lassen sich diese Schranken als scharf erweisen. Die Untersuchung, die aus einem größeren Gesichtswinkel unternommen ist, führt außerdem auf eine Reihe von schönen Einzelergebnissen (z. B.: eine gebrochene Funktion der Ordnung 0, die einen Zielwert  $\zeta$  besitzt, kann keinen von  $\zeta$  verschiedenen Nevannlinnaschen Ausnahmewert haben), gibt aber auch Anlaß zu sehr anregenden heuristischen Betrachtungen und Vermutungen über allgemeinere Tatsachen, die sich hinter dem obigen Satz verbergen. — Die Besprechung einer Klasse von kanonischen Produkten führt auf Riemannsche Flächen, deren Struktur Einblicke in das Zustandekommen von Defekten auch ohne Auftreten von Randstellen verspricht. — Anm. d. Ref.: Beispiele in dieser Richtung sind gleichzeitig und unabhängig vom Ref. und von Wilhelm Möller † in einer in Kürze erscheinenden Arbeit von linearen Differentialgleichungen her konstruiert worden. (Vgl. Ullrich, dies. Zbl. 21, 238.) *Ullrich* (Gießen).

**Wittich, Hans: Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen.** Math. Z. 45, 642—668 (1939).

Es wird ein hinreichendes Kriterium für das Eintreten des Grenzpunktfalles bei Flächen (von einfachem Zusammenhang) angegeben, die nur über  $q$  Punkten algebraisch oder logarithmisch verzweigt sind. Die Beschreibung der Flächen erfolgt durch Streckenkomplexe nach Elfving (dies. Zbl. 10, 363). Für den Wortlaut der Bedingung ist die Art der Ausschöpfung der Fläche (des Komplexes) nach Generationen von einem Ausgangsknoten aus wesentlich. Es wird ein offener Teilkomplex durch eine „äußere“ Kurve  $\Gamma_n^0$  ausgeschnitten, die nur Knoten der Generation  $n$  verbindet, aber „innere“



Kurven gleicher Eigenschaft umschließen kann, die wieder Knoten von noch höheren Generationen als  $n$  umschließen — während im Äußeren von  $I_n^0$  nur Knoten höherer Generation liegen. Ist dann  $\sigma_0(n)$  die Knotenzahl von  $I_n^0$ , so wird die Divergenz von

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0(n)}$$

als hinreichend für parabolischen Flächentypus nachgewiesen. — Das Gerüst des Beweises geht auf die Ahlfors'sche Methode zurück (z. B. dies. Zbl. 4, 357); die Berücksichtigung unendlich vieler algebraischer Windungspunkte führte indes auf Ausschöpfungsschwierigkeiten und hatte die Rechnungen erheblich kompliziert. Wittich hat beide Hindernisse aus dem Wege geräumt; die Rechnungen konnten durch das Dazwischenschalten nichtkonformer Abbildungen geschickt vereinfacht werden; dabei wurden zwei von Teichmüller (dies. Zbl. 16, 407) bewiesene Hilfssätze benutzt, die zeigen, daß nur der Streckenkomplex (nicht aber die Lage der Windungssorten) den Typus der konformen Abbildung in die Ebene beeinflusst, und daß auch quasikonforme Abbildungen diesen Typus nicht berühren. — Das Wittich'sche Hauptergebnis umfaßt einige schon früher bekannte Kriterien, insbesondere den Fall der Flächen mit endlich vielen logarithmischen Enden (Nevanlinna, Ahlfors, dies. Zbl. 4, 355, 357) und den mit endlich vielen periodischen Enden (Ullrich, dies. Zbl. 13, 271). Der Satz entscheidet bei der Weierstraß'schen  $Pe$ -Fläche, versagt aber bei  $e^z$ . Ullrich.

Ulrich, F. E.: The problem of type for a certain class of Riemann surfaces. Duke math. J. 5, 567—589 (1939).

Die betrachtete Flächenklasse entsteht aus der Fläche der Gammafunktion durch Verschiebung der algebraischen Windungspunkte 1. Ordnung innerhalb der positiven (bzw. negativen) reellen Achse, jedoch so, daß ihre Folge sich allein gegen  $\infty$  häuft. Für diese Flächenklasse werden unter Einführung geeigneter Metrik nach dem Vorgang von Ahlfors (z. B. dies. Zbl. 17, 36) einige hinreichende Typenkriterien für das Eintreten des Grenzpunktfalles (parabolischen Typus) gewonnen und gezeigt, daß diese Kriterien im Sonderfall der Gammafläche die Entscheidung liefern. Die Kriterien haben die bekannte Form von Divergenzaussagen über unendliche Reihen (Integrale), die an Hand der geometrischen Struktur der Flächen mit Hilfe der Metrik gefaßt werden.

Ullrich (Gießen).

Dubois, J.: Essai d'extension aux fonctions quasi méromorphes, d'une méthode de M. E. Borel relative au développement d'une fonction méromorphe en série uniformément convergente de fonctions rationnelles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 224—232 (1939).

L'Aut. considère des fonctions uniformes  $F(z)$  qui possèdent  $k+1$  points singuliers essentiels  $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1} = \infty$  et des pôles ayant  $a_{k+1} = \infty$  pour seul point d'accumulation (il s'agit donc d'une catégorie particulière de fonctions quasi-méromorphes). En appliquant une méthode de Borel (Leçons sur les fonctions méromorphes, p. 91 et suiv.), l'Aut. établit le théorème: dans une aire appropriée (A),  $F(z)$  peut être représentée par une somme 1° d'une fonction quasi entière à  $k$  points singuliers essentiels à distance finie; 2° d'une série uniformément convergente de fonctions rationnelles; les termes de cette série ont en général plusieurs pôles et cette série est associée d'une certaine façon à l'aire (A). — L'Aut. applique ensuite le résultat à une fonction quasi entière  $F(z)$  dont les zéros n'ont pas d'autre point d'accumulation que l'infini.

Charles Blanc (Lausanne).

Vignaux, Juan-Carlos: Sur les familles normales de fonctions holomorphes ( $\alpha$ ). C. R. Acad. Sci., Paris 209, 147—149 (1939).

Enoncé, sans démonstration, du théorème suivant, sur les familles de fonctions holomorphes ( $\alpha$ ) de M. Pompeiu: Etant donnée une suite  $f_n(z)$  de fonctions holomorphes ( $\alpha$ ) en  $D$ , uniformément convergente vers  $f(z)$  sur le contour fermé  $C$ , si la suite de ses dérivées aréolaires  $\varphi_n(z)$  continues converge uniformément dans le domaine

( $D$ ) vers  $\varphi(z)$ , la fonction limite  $f(z)$  est holomorphe ( $\alpha$ ) et sa dérivée aréolaire est  $\varphi(z)$ . L'Aut. énonce encore quelques propositions connexes. *Charles Blanc* (Lausanne).

**Behnke, H.:** Über die Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen und den Zusammenhang der Singularitäten. *Math. Ann.* **117**, 89—97 (1939).

Es wird definiert, wann ein Bereich  $B$  über dem projektiv abgeschlossenen Raum der  $z_1, z_2, \dots, z_n$  endlichblättrig heißen soll, und nachgewiesen, daß diese Bereiche identisch sind mit den Bereichen, die nur erreichbare Randpunkte aufweisen. Sodann wird ein Satz von R. Caccioppoli (s. dies. Zbl. **20**, 143) unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen bewiesen: Ist die analytische Funktion  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  mit  $n \geq 2$  endlichblättrig, so ist die Gesamtheit ihrer singulären Punkte zusammenhängend.

*Fritz Sommer* (Berlin-Charlottenburg).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

● **De Finetti, B.:** Compte rendu critique du colloque de Genève sur la théorie des probabilités. (Actualités scient. et industr. Nr. 766.) Paris: Hermann & Cie. 1939. Frs. 20.—.

**Cantelli, F. P.:** Su una teoria astratta del calcolo delle probabilità e sulla sua applicazione al teorema detto delle „probabilità zero e uno“. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **10**, 1—9 (1939).

In dieser Arbeit setzt Verf. den Ausbau der von ihm 1932 (Cantelli, Una teoria astratta del Calcolo delle probabilità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **3**) entworfenen, in mehreren Arbeiten und Vorträgen weiter entwickelten abstrakten Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung fort, welche die Zufallsvariable mit einer Funktion, die Wahrscheinlichkeit mit dem Lebesgueschen Maße einer Punktmenge identifiziert. Mit Hilfe dieser äußerst einleuchtenden und fruchtbaren Illustration beweist Verf. folgende leicht in die Sprache der Analysis übersetzbare Sätze: Wenn in bezug auf die Werte, die eine Folge von Zufallsvariablen in einer Folge von Proben annimmt, eine Eigenschaft  $\Pi$  mit einer wohldefinierten, von 0 verschiedenen Wahrscheinlichkeit  $P$  existiert, konvergiert die durch die Voraussetzung, daß die Resultate der ersten  $n$  Proben mit  $\Pi$  verträglich seien, bedingte Wahrscheinlichkeit  $P^{(n)}$  für  $\Pi$  bei über alle Grenzen wachsendem  $n$  gegen 1. Hängt insbesondere die Eigenschaft  $\Pi$  nicht vom Ergebnis der ersten  $n$  Proben ab, so ist die Wahrscheinlichkeit  $P$  für die Eigenschaft  $\Pi$  der Folge von Zufallsvariablen entweder 0 oder 1.

*M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

**Ottaviani, G.:** Sulla teoria astratta del calcolo delle probabilità proposta dal Cantelli. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **10**, 10—40 (1939).

Die Arbeit befaßt sich mit dem Ausbau der Cantellis abstrakten Theorie der Wahrscheinlichkeit. Verf. beweist, daß jede abzählbare Menge von beliebig gegebenen abhängigen oder unabhängigen Zufallsvariablen durch ein System entsprechender meßbarer Funktionen dargestellt werden kann, und vergleicht Cantellis Theorie mit der erheblich jüngeren von Lévy. Schließlich bestätigt er die Wirksamkeit der Cantellis Darstellungsweise durch die höchst einfache Ableitung zahlreicher Konvergenzsätze über Folgen und Reihen von Zufallsvariablen aus analogen bekannten Sätzen der Analysis.

*M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

**Fréchet, Maurice:** Événements compatibles et probabilités fictives. *C. R. Acad. Sci., Paris* **208**, 1703—1705 (1939).

Es sei  $p_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ereignisse  $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_r}$  von  $m$  Zufallsereignissen  $A_1, \dots, A_m$  zusammentreffen,  $S_r = \sum p_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$  und  $P_r$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau  $r$  der Ereignisse  $A_k$  zusammentreffen. Mit den  $S_r$  wird die Gleichung

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k S_{m-k} x^k = 0 \quad (S_0 = 1) \quad (1)$$



gebildet; ihre Lösungen, unter denen komplexe und mehrfache sein können, seien  $x_1, \dots, x_m$ . Verf. sieht die  $x_k$  als die fiktiven Wahrscheinlichkeiten eines Systems unabhängiger Ereignisse  $H_k$  an. Berechnet man nach den formalen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit  $\bar{P}_r$  dafür, daß genau  $r$  der Ereignisse  $H_k$  zusammentreffen, so findet man  $\bar{P}_r = P_r$ . Geht man nun von beliebigen Zahlen  $S_r$  aus, so lassen sich die fiktiven Wahrscheinlichkeiten  $x_k$  auf Grund der Gleichung (1) stets bilden. Es wird ein Kriterium dafür angegeben, daß es zu den  $S_r$  auch ein System von Ereignissen  $A_k$  gibt, für das die  $S_r$  die Bedeutung von wirklichen Wahrscheinlichkeiten der oben beschriebenen Art haben, und es werden Ungleichungen für die Wahrscheinlichkeiten  $S_r$  angegeben. Kamke (Tübingen).

**Doeblin, W.:** Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'états. Rev. math. Union Interbalkan. 2, 77—105 (1938).

Étude de l'évolution d'un système matériel ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états  $E_1, \dots, E_r$ . Le système évolue par sauts; étant donné qu'il se trouve dans l'état  $E_i$  il y a une probabilité de passage  $p_{ik}$  pour qu'il passe par un saut à  $E_k$  et une probabilité  $P_{ik}^{(n)}$  pour qu'il passe à  $E_k$  par  $n$  sauts. — Cas régulier où  $P_{ij}^{(n)} \rightarrow P_j$ , si  $n \rightarrow \infty$  quels que soient  $i$  et  $j$ . — Il est impossible de passer de  $E_i$  en  $E_k$  en une épreuve (par un saut), si  $p_{ik} = 0$ . Partons d'un état quelconque  $E_1$ . Il peut y avoir un certain nombre d'états  $E_i$  tels qu'il existe des chemins aller et retour de  $E_1$  en  $E_1$  par  $E_i$ . Ces états forment le groupe  $I$ . Le groupe  $I$  sera dit un groupe final, s'il n'y a pas de chemin menant de  $I$  à un autre groupe; le système restera indéfiniment dans le groupe final  $I$ . S'il y a un chemin menant de  $I$  à l'extérieur,  $I$  sera dit groupe de passage. La probabilité pour qu'après  $n$  épreuves le système se trouve encore à l'extérieur de l'ensemble des groupes finals, tend exponentiellement vers zéro, si  $n$  augmente indéfiniment. L'auteur étudie en détail les probabilités relatives au mouvement à l'intérieur d'un groupe final, il donne le calcul de la partie asymptotique des  $P_{ik}^{(n)}$  et il traite encore d'autres questions relatives aux chaînes de Markoff. B. Hostinský (Brünn).

**Yosida, Kôsaku:** Operator-theoretical treatment of Markoff's process. II. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 127—130 (1939).

Ce travail fait suite de la première partie publiée en 1938 (Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 363; ce Zbl. 20, 146). Supposons qu'il y a un entier  $n$  et un opérateur  $V$  complètement continu (voir pour les définitions: K. Yosida, Abstract Integral Equations and the Homogeneous Stochastic Process. Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 286; ce Zbl. 19, 412) tel que  $\|P^n - V\|_M < 1$ ;  $P(x, E)$  représente la probabilité pour que le point mobile sur l'intervalle  $\Omega = (0, 1)$  passe de  $x$  à une position dans un ensemble  $E$  de  $\Omega$  dans une unité de temps, et  $M$  désigne l'espace linéaire de toutes les fonctions additives des ensembles définies pour tous les ensembles boréliens dans  $\Omega$ . Alors chaque valeur propre  $\lambda$  à module 1 de  $P$  est égale à une racine de l'unité. B. Hostinský (Brünn).

● **Hostinsky, B.:** Equations fonctionnelles relatives aux probabilités continues en chaîne. (Actualités scient. et industr. Nr. 782.) Paris: Hermann & Cie. 1939.

**Kolmogoroff, André:** Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 2043—2045 (1939).

Supposons qu'à chaque entier  $t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) corresponde une grandeur aléatoire réelle  $x(t)$  avec  $E x(t) = 0$ ,  $E x^2(t) = 1$  ( $E x$  représente la valeur moyenne). La suite  $|x(t)|$  s'appelle stationnaire [Khinchine, Math. Ann. 109, 604 (1934)], si les coefficients de corrélation  $R(k) = E\{x(t+k)x(t)\}$  ne dépendent que de  $k$ . On a, d'après H. Wold (Analysis of stationary time series. Uppsala 1938; ce Zbl. 19, 356.)

$$R(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k\lambda dS(\lambda), \quad S(\lambda) = R(0)\lambda + 2 \sum_{k \neq 0} \frac{R(k)}{k} \sin k\lambda.$$

La dérivée  $s(\lambda) = S'(\lambda)$  de  $S(\lambda)$  existe presque partout dans l'intervalle  $0 \leq \lambda \leq \pi$ . — L'auteur considère le problème d'interpolation: Pour chaque entier positif  $n$ , on trouve,

par la méthode des moindres carrés, la forme linéaire

$$L_{2n} = a_1 x(t-n) + a_2 x(t-n+1) + \dots + a_n x(t-1) + a_{n+1} x(t+1) \\ + a_{n+2} x(t+2) + \dots + a_{2n} x(t+n)$$

déterminée par la condition  $E[x(t) - L_{2n}]^2 = \sigma_n^2 = \min$ . Les coefficients  $a_i$  ne dépendent que de  $R(\lambda)$ ; les  $\sigma_n^2$  forment une suite non croissante. L'auteur exprime son résultat principal, concernant le problème de l'interpolation, par la formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = \frac{\pi}{\pi \int_0^\pi \frac{d\lambda}{s(\lambda)}}.$$

Le problème d'extrapolation se pose d'une façon analogue. *B. Hostinsky* (Brünn).

● **Baten, William Dowell:** *Elementary mathematical statistics*. New York: John Wiley & Sons a. London: Chapman & Hall 1938. X, 338 pag. 15/-.

● **Kelley, Truman Lee:** *The Kelley statistical tables*. New York: Macmillan Comp. 1938. 136 pag. \$ 4.50.

● **Pearson, E. S.:** *Karl Pearson, an appreciation of some aspects of his life and work*. Cambridge: Univ. press a. New York: Macmillan Comp. 1938. VIII, 170 pag. \$ 3.75.

**Schelling, H. von:** Kennzeichen für eine rein zufällige Folge der Werte in einer zeitlich geordneten Beobachtungsreihe. *Astron. Nachr.* 269, 155—159 (1939).

Um festzustellen, ob die Verteilung der Restfehler  $B - R$  einer längeren, chronologisch geordneten Reihe rein zufällig ist oder nicht, schlägt Verf. zwei einfache Verfahren vor, von denen das eine nur den Wechsel im Steigen und Fallen der Reihenwerte berücksichtigt, während beim anderen auch die Größe der Reihenwerte benutzt wird. Beispiele zeigen, daß beide Methoden leistungsfähig sein können. *Rehbock*.

**Tintner, G.:** On tests of significance in time series. *Ann. math. Statist.* 10, 139—143 (1939).

**H. Wold** (*Analysis of Time Series*, Upsala 1938; this Zbl. 19, 356) gives an excellent treatment of time series save primarily for the omission of tests of significance, which latter have proved of great importance in other applications. In this note the author proposes some tests of significance for variances of differences, which make use of either Fisher's  $z$ -table or Snedecor's  $F$ -table. A serial covariance,  $w$ , using only selected terms is studied by the method of characteristic functions and an explicit formula for its distribution is found. *Albert A. Bennett* (Providence).

**Gumbel, Émile-Jules:** La durée de retour, mesure de l'indépendance. *C. R. Acad. Sci., Paris* 208, 1471—1473 (1939).

Supplementing previous investigations (see this Zbl. 20, 149), which could serve to test dependence among radioactive emissions, the author here proposes a new statistic, the interval of return, which is, as a function of a given variable measure  $x$ , the average interval between two observations exceeding  $x$ , and successive in the sense that no observation so large has occurred in this interval. This statistic is independent of chronological order. The interval is expressed not in standard units of time, but in terms of intervals between successive observations. Theoretical probability rather than observed frequencies, is used for this new statistic. Applications are made to the Gaussian and to other laws of distribution. *Albert A. Bennett* (Providence).

**Gumbel, Émile-J.:** La durée de retour des plus grandes valeurs. *C. R. Acad. Sci., Paris* 208, 2041—2043 (1939).

The author applies his recently developed theory of the "duration of return" of maximum values, to justify theoretically formulas proposed on purely empirical grounds by W. E. Fuller [*Trans. Amer. Soc. Civ. Engin.* 77, 564 (1914)] and generalized by Th. Saville [*Publ. Col. Engin.* 6, 398 (1935—1936)] for flood rises in given rivers.

*Albert A. Bennett* (Providence).



**Geiringer, Hilda:** Bemerkung zur Wahrscheinlichkeit nicht unabhängiger Ereignisse. Rev. math. Union Interbalkan. 2, Fasc. 3/4, 1—7 (1939).

Verf. betrachtet den allgemeinen Fall von beliebig verknüpften Ereignissen bzw. Zufallsvariablen, bemerkt die Zweckmäßigkeit der Darstellung mittels „bedingter“ Wahrscheinlichkeiten (bzw. W.-Verteilungen), falls die Ereignisse (Zufallsvariablen) als in eine Reihenfolge geordnet anzusehen sind, und zeigt, wie sich einige einfache Fälle (Verkettung, Unabhängigkeit) als Sonderfälle gestalten. *Bruno de Finetti*.

**Geiringer, Hilda:** Über die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen. J. unified Sci. 8, 151—176 (1939).

Verf. versucht, die „Irrtümer und Mißdeutungen“ aufzuklären, die den Begriff der „Hypothesenwahrscheinlichkeiten“ und die Anwendung des Bayesschen Theorems betreffen. Es handelt sich teilweise um wirkliche Irrtümer, deren Richtigstellung eine rein mathematische und daher allgemein erkennbare Tatsache darstellt, und teilweise von Meinungsverschiedenheiten, über welche die Bemerkungen der Verf. dem Standpunkte der Misesschen Theorie entsprechen. *Bruno de Finetti* (Trieste).

**Welch, B. L.:** On the distribution of maximum likelihood estimates. Biometrika 31, 187—190 (1939).

In großen Stichproben strebt bekanntlich die Verteilung einer Schätzung nach der maximum-likelihood-Methode gegen die Normalverteilung. Für kleine Stichproben gibt Verf. ein Verfahren an, um die Normalverteilung in diesem Falle durch eine bessere Näherungsverteilung zu ersetzen. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

**Jeffreys, Harold:** Random and systematic arrangements. Biometrika 31, 1—8 (1939).

Bei der Frage der Anwendung der Methoden der biologischen Statistik in der Erdbebenkunde treten Probleme auf, die zu grundsätzlichen Bemerkungen Anlaß geben. Die Experimentplanung (z. B. Wahl und Lage der Beobachtungspunkte) läßt bereits gewisse Besonderheiten erkennen. Es zwingt schon die Wahl der algebraischen Form des statistisch zu erprobenden Gesetzes zu eingehenden Voruntersuchungen und führt dann zur besonderen Wahl der Versuchsbedingungen. Diese Fragen werden im Zusammenhang einer Polemik zwischen „Student“ und Fisher eingehend erörtert. Der Methodik der Stichprobenerhebung und der darauffolgenden Systematik des Experiments dienen weitere Ausführungen. Alle diese Erwägungen bedingen eine Einschränkung des „Zufalls“. *F. Knoll* (Wien).

**Wald, A., and J. Wolfowitz:** Confidence limits for continuous distribution functions. Ann. math. Statist. 10, 105—118 (1939).

The paper concerns with the so-called inverse probability. Let  $n$  be given, and let  $x_1, x_2, \dots, x_n$  be the observed values of the  $n$  stochastic variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  of which we know only that they are independently distributed with the same "continuous" distribution function  $f(x)$ . In a variety of ways, two functions  $\bar{g}_{E,\alpha}(x)$  and  $g_{E,\alpha}(x)$  are constructed to each pair of  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  and  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ , such that, if we observed  $E$  in experiments, then the relative frequency that the unknown  $f(x)$  (which need not be the same in all experiments) satisfies

$$g_{E,\alpha}(x) \leq f(x) \leq \bar{g}_{E,\alpha}(x)$$

(for all  $x$ ) would exactly be  $\alpha$ . These two functions are called the upper and the lower confidence limits, respectively, corresponding to the confidence coefficient  $\alpha$ . The result may be considered as a continuation of the theory of confidence limits for unknown parameters of distribution functions as developed in recent years by Fisher, Neyman, Wald and others.

*Kôzaku Yosida* (Osaka, Japan).

**Wald, Abraham:** Limits of a distribution function determined by absolute moments and inequalities satisfied by absolute moments. Trans. Amer. Math. Soc. 46, 280—306 (1939).

Denote by  $X$  a chance variable and by  $P(\alpha < X < \beta)$  the probability that  $\alpha < X < \beta$ . Similarly denote by  $P(X < \beta)$  the probability that  $X < \beta$  and by

$P(X = \beta)$  the probability that  $X = \beta$ . For any positive integer  $r$  the expected value  $E|X - x_0|^r$  of  $|X - x_0|^r$  is called the absolute moment of order  $r$  about  $x_0$ . We shall say for any positive number  $d$  that  $a_d$  is the sharp lower limit of  $P(-d < X - x_0 < d)$  if the following two conditions are fulfilled: (1) For each chance variable  $Y$  for which  $E|Y - x_0|^{i_\nu} = E|X - x_0|^{i_\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, j$ ) the inequality  $P(-d < Y - x_0 < d) \geq a_d$  holds. (2) To each  $\varepsilon > 0$  a chance variable  $Y$  can be given such that  $E|Y - x_0|^{i_\nu} = E|X - x_0|^{i_\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, j$ ) and  $P(-d < Y - x_0 < d) < a_d + \varepsilon$ . Similarly we shall define the sharp upper limit. — Problem 1. The absolute moments of the order  $i_1, \dots, i_j$  of a chance variable  $X$  are given about the point  $x_0$ , where  $i_1, \dots, i_j$  denote any positive integers. It is required to determine the sharp lower and sharp upper limit of  $P(-d < X - x_0 < d)$  for any positive value  $d$ . The solution of this problem is a generalization of the inequality of Markoff (A. Wald, *Ann. of Math. Statistics* 1938). — Problem 2. A real value  $x_0$  and a system of positive integers  $i_1, \dots, i_j$  are given. What are the necessary and sufficient conditions which must be satisfied by positive numbers  $a_1, \dots, a_j$  that a chance variable  $X$  exists for which the  $i$ -th moment about  $x_0$  is equal to  $a_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, j$ )? The author introduces characteristic chance variable  $X_r$  relative to  $M_{i_1}, \dots, M_{i_r}$ ;  $M_{i_r}(X_{r-1})$  is a function of  $M_{i_1}, \dots, M_{i_{r-1}}$  which can be calculated. The following theorem gives the solution of Problem 2: The values  $a_1, \dots, a_j$  ( $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ) can be realised as moments of the orders  $i_1, i_2, \dots, i_k$  if and only if  $a_1 \geq 0, a_2 \geq M_{i_2}(X_1), \dots, a_k \geq M_{i_k}(X_{k-1})$  where  $X_r$  denotes the characteristics chance variable relative to  $M_{i_1}, \dots, M_{i_r}$ . B. Hostinský (Brünn).

**Mises, R. v.:** The limits of a distribution function if two expected values are given. *Ann. math. Statist.* 10, 99—104 (1939).

In connexion with A. Wald's paper (this Zbl. 20, 380), the sharp lower limit (limes inferior) at any  $t$  of the distribution function  $P(t)$  of a random variable is determined, when its two absolute moments are given; the sharp upper limit is also determined. Reducing the problem to the mass distribution on a convex curve of which the centre of mass is given, the result is obtained by an elementary statical consideration.

*Kôzaku Yosida* (Osaka, Japan).

**Kac, M., and E. R. van Kampen:** Circular equidistributions and statistical independence. *Amer. J. Math.* 61, 677—682 (1939).

The authors investigate for angular variables a distribution problem analogous to one already established for linear variables. The Gaussian distribution may be characterized in various ways by restrictions involving one or more of the concepts stability, independence, repeated iteration, and so forth. A requirement of stability leads for angular variables to circular equidistribution or else to a discontinuous distribution with the probability equidistributed over a finite number of equidistant points on the circle, as shown by P. Levy (this Zbl. 19, 175). There has remained some disagreement in the literature as to what should be the analogue of Gaussian distribution in the case of angular variables. Except in a very special case the requirement of statistical independence essentially in the sense of Steinhaus, is here shown to lead again to equidistribution in the circle. *Albert A. Bennett* (Providence).

## Geometrie.

### Differentialgeometrie:

● **Hlavatý, Václav:** *Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. Autorisierte Übers. v. Max Pinl.* Groningen-Batavia: P. Noordhoff N. V. 1939. XI, 569 S. Fl. 14.—.

Jede moderne Differentialgeometrie setzt notwendig eine Einführung in die Tensorrechnung voraus, und es ist die Schwierigkeit der Darstellung, den Leser nicht durch den formalen Tensorkalkül zu ermüden, sondern seinen Blick für die geometrischen Schönheiten des Objekts frei zu halten. Diese Schwierigkeit hat Verf. dadurch zu



überwinden gesucht, daß er in der Flächentheorie gleichzeitig mit dem fortschreitenden Studium der ersten Grundform die Tensoralgebra entwickelt und deren Apparat sofort in der Theorie der konformen Abbildung sowie der geodätischen Krümmung zur Anwendung bringt. Verf. baut im übrigen die Flächentheorie so auf, daß sie möglichst weitgehend von der Annahme der Einbettung in den  $R_3$  unabhängig ist; es wird daher das Krümmungsmaß auf der Grundlage der kovarianten Differentiation durch den Riemann-Christoffelschen Tensor eingeführt und erst später beim Studium der zweiten Grundform die übliche Erklärung mittels der Normalschnitte bzw. der sphärischen Abbildung gegeben. Der Vorteil dieses Weges wird eigentlich erst bei der im Duche nicht berührten Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten sichtbar, sein Nachteil ist die notwendige Überwindung eines umfangreichen formalen Apparates an verhältnismäßig früher Stelle, wo der Leser die Tragweite der eingeführten Begriffe nicht überschauen kann. — Methodisch bietet das Buch demgemäß viel Neues, inhaltlich begreift es lediglich die metrische Kurven- und Flächentheorie im kleinen, wobei die große Ausführlichkeit in der Gesamtdarstellung wie auch in der Verfolgung einzelner geometrischer Sachverhalte der didaktischen Zielsetzung entspricht. Trotz der Hervorkehrung des formalen Gesichtspunktes der Bildung von Invarianten beschränkt sich Verf. (mit Ausnahme der Minimalkurven und -flächen) aufs Reelle, und ihm entgleiten damit interessante Objekte wie die Kurven in Minimalebenen oder die Serretschen Flächen, wie ja überhaupt die metrische Geometrie erst durch die Berücksichtigung der isotropen Gebilde ihre volle Abrundung erhält. — Inhalt: 1. Ebene und räumliche Kurven. Hervorgehoben sei die vollständige Integrations-theorie der natürlichen Gleichungen, die auf diejenige einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit passenden Anfangsbedingungen reduziert wird. 2. Die erste Grundform der Flächentheorie. Tensoralgebra; der erste Differentiator und anschließend die Theorie der geodätischen Parallelen; konforme Abbildung (schön sind die Sätze über die durch zwei feste Punkte gehenden Loxodromen der Kugel); das absolute Differential nach Levi-Civita und Schouten und darauf aufbauend der Begriff pseudoparalleler bzw. -äquipollenter Vektoren; geodätische Linien und geodätische Krümmung; der zweite Differentiator, das Gaußsche Krümmungsmaß, Gauß-Bonnetsche Integralformel; isometrische Flächenabbildungen. 3. Die zweite Grundform der Flächentheorie. Normalkrümmung, geodätische Torsion; ausgezeichnete Flächenkurven; Bonnets Existenzsatz. 4. Besondere Flächen: Regelfl., Zentrafl. Weingarten-sche Fl. Schiebefl., Minimalfl., sphärische und pseudosphärische Fl. und ähnliches. Gerade dieses letzte Kapitel zeichnet sich durch eine Fülle fesselnder geometrischer Sätze aus. — Die Arbeit des Übersetzers ist nicht immer einwandfrei; Ausdrücke wie „das einheitliche unifizierende Prinzip“ (113) oder „brachylogische Abkürzungen“ (114) sind sprachliche Mißbildungen. *Harald Geppert* (Berlin).

**Fréchet, Maurice:** Sur une définition intrinsèque de l'aire d'une surface courbe comme limite d'aires polyédrales inscrites. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 285—300 (1939).

Les surfaces considérées sont sans point multiple et les coordonnées de leurs points peuvent s'exprimer en fonctions de deux paramètres  $(u, v)$  sur un polygone  $Q$  de sorte que ces fonctions ont des dérivées continues en  $u, v$  tandis que leurs trois déterminants fonctionnels ne sont à la fois nuls en aucun point de  $Q$ . Pour un nombre positif fixe  $\omega < \pi$  on peut construire une suite de polyèdres  $P_\omega$  à faces triangulaires  $T$  inscrites dans la surface considérée  $s$  et telles que les angles des triangles restent  $< \omega$ . Alors, lorsque pour cette suite la plus grande arête de  $P_\omega$  converge vers zéro,  $P_\omega$  converge vers  $s$  et l'aire de  $P_\omega$  converge vers l'intégrale connue 
$$I = \iint_Q \sqrt{\sum \left[ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]^2} du dv.$$

Si l'on considère que ce théorème définit l'aire de  $s$ , alors l'aire est non seulement indépendante de  $\omega$ , mais la forme géométriquement intrinsèque du théorème montre

que l'aire est indépendante de la représentation paramétrique qui intervient dans  $I$ . Une autre condition de forme géométrique qu'on peut poser aux triangles des polyèdres est: l'angle du plan de chaque triangle avec le plan tangent en l'un de ses sommets tend uniformément vers zéro avec la plus grande arête des polyèdres. Cette condition est nécessairement vérifiée quand la condition donnée plus haut est vérifiée.

*J. Ridder* (Groningen).

**Kowalewski, Gerhard:** Ein Beitrag zur projektiven Differentialgeometrie. *Mh. Math. Phys.* 48, 1—18 (1939).

Die vorliegende Arbeit stellt die Anwendung der allgemeinen Evolutentheorie des Verf. auf die projektive Geometrie der ebenen Kurven dar. Durch ein Kurvenelement 6. Ordnung  $e^0$  einer Kurve  $C$  geht eine singuläre Bahnkurve ( $J = \text{konst.}$ ). Nun gibt es zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  (Pole), die in bezug auf ein längs einer singulären Bahnkurve variierendes Element  $e$  feste Relativkoordinaten haben. Zu jedem Element  $e^0$  gehören also zwei Pole. Durchläuft  $e$  die Kurve  $C$ , so beschreiben die Pole die beiden niederen Evoluten. Verf. bestimmt die Kurven, für die eine dieser beiden Evoluten geradlinig ist. Die höhere Evolute wird beschrieben vom dritten Pol von  $e^0$ , der zu den beiden ersten in bezug auf den oskulierenden Kegelschnitt konjugiert ist. Es gibt eine Kurve 3. Ordnung, die im Punkt des Bezugselementes  $e^0$  einen Doppelpunkt hat und  $e^0$  enthält. Die Tangente im Doppelpunkt, die  $e^0$  nicht berührt, ist die Querlinie. Die Arbeit schließt mit der Bestimmung der Hüllkurve der Querlinien. *W. Haack* (Karlsruhe).

**Yano, K., and Y. Muto:** A projective treatment of a conformally connected manifold. *Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s.* 21, 270—286 (1939).

A conformal connection is introduced by considering an  $n$ -dimensional manifold  $X_n$  with each point of which is associated an  $(n+1)$ -dimensional projective space  $P_{n+1}$  with a quadratic hypersurface. The conformal connection is defined in such a way that the quadric is left invariant and that the points of contact do not correspond to each other. Then any curve in  $X_n$  can be developed into a curve in the local space of one of its points. The author considers the curves whose developments are circles.

*J. Haantjes* (Amsterdam).

**Yano, Kentaro:** Sur la connexion de Weyl-Hlavatý et la géométrie conforme. *Proc. Imp. Acad. Jap.* 15, 116—120 (1939).

En partant de la densité conforme  $G_{\lambda\mu}$  de l'espace on en peut construire une connexion  $\{\overset{r}{\lambda}_{\mu}\}$ ,  $Q_\mu$  de Weyl, où  $G_{\lambda\mu;\omega} = 0$  et  $Q_\omega$  subit des transformations arbitraires  $Q_\mu \rightarrow Q_\mu + \psi_\mu$ , ( $\psi$  arbitraire). Une courbe étant donnée, on part du paramètre  $s$  tel que  $G_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = 1$  ce qui nous permet, en combinant les dérivées covariantes  $\frac{\delta^2 x^\nu}{\delta s^2}$ ,  $\frac{\delta^3 x^\nu}{\delta s^3}$ , de parvenir aux équations conformes (et invariants par rapport au vecteur  $Q_\mu$ ) des circonférences généralisées [cfr. K. Yano, *Proc. Imp. Acad. Jap.* 14, 329—332 (1938); ce *Zbl.* 21, 262]. De même, les dérivées successives  $\frac{\delta t}{\delta s}$ ,  $\frac{\delta^2 t}{\delta s^2}$ ,  $\frac{\delta^3 t}{\delta s^3}$  nous mènent à la définition conforme (et invariante par rapport au  $Q_\omega$ ) du paramètre projectif de la circonférence généralisée.

*Hlavatý* (Prag).

**Haimovici, M.:** Variétés totalement extrémales et variétés totalement géodésiques dans les espaces de Finsler. *Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math.* 25, 559—644 (1939).

Verf. betrachtet einen Finslerschen Raum  $X_n$ , dessen Metrik durch eine Funktion  $ds = L(x^i, dx^i)$  definiert ist. Dabei ist  $L(x, dx)$  homogen ersten Grades in  $dx^i$ . Ein Unterraum  $X_m$  wird extremal genannt, wenn jede geodätische Linie der  $X_m$  auch geodätische Linie der  $X_n$  ist. Es wird gezeigt, daß ein die  $X_m$  tangierender Vektor bei pseudoparalleler Verschiebung im Berwaldschen Sinne auf einer bestimmten Weise längs der  $X_m$  tangierend bleibt. Verf. betrachtet Räume, die durch jedes  $p$ -dimensionale Element eine extremale  $X_p$  gestatten und auch solche, die durch jedes Linienelement eine einzige extremale  $X_p$  gestatten. Ein Unterraum  $X_m$  wird geodätisch genannt, wenn ein die  $X_m$  tangierender Vektor bei pseudoparalleler Verschiebung längs der  $X_m$



im Cartanschen Sinne tangierend bleibt. Eine geodätische  $X_m$  ist extremal, aber nicht umgekehrt. Räume, die durch jedes  $p$ -dimensionale Element eine geodätische  $X_p$  gestatten, sind Riemannsche Räume konstanter Krümmung. Verf. betrachtet noch die Räume, die durch jedes Linienelement eine einzige geodätische  $X_p$  gestatten.

*J. Haantjes (Amsterdam).*

**Berwald, L.: Über Finslersche und Cartansche Geometrie. II. Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale und Parallelhyperflächen in Cartanschen Räumen.** *Compositio Math.* 7, 141—176 (1939).

Der Verf. beschäftigt sich hauptsächlich mit Parallelhyperflächen sowie mit der mittleren extremalen Krümmung der Hyperflächen in den Cartanschen Räumen. Im ersten § wird der Cartansche Raum besprochen und gezeigt, daß ein solcher Raum, wo ein Rauminhalt existiert (was durch Verschwinden eines Vektors  $A^i$  zum Ausdruck gebracht wird), sich auch als Finslerscher Raum auffassen läßt. Im zweiten § wird die Normalform der zweiten Variation eines „Oberflächen“-integrals abgeleitet, woraus sich die geometrische Deutung der mittleren extremalen Krümmung einer Hyperfläche und — für Extremalen — eine einfache Deutung des Skalars  $U_0^*$  von Koschmieder ergibt. Weiter werden parallele infinitesimale Transformationen eingeführt, nämlich solche, für welche die Normalkomponente des Variationsvektors  $\delta x^i$  einen konstanten Wert enthält. Mittels solcher Transformationen entstehen Parallelhyperflächen zu einer willkürlichen Hyperfläche. Die bekannten Eigenschaften solcher Parallelhyperflächen in Riemannschen Räumen bleiben nur in den Cartanschen Räumen mit  $A^i = 0$  erhalten. Parallele Hyperflächen, die zugleich Extremalen sind, sind „Hyperebenen“.

*Hlavatý (Prag).*

### **Topologie :**

**Haupt, Otto: Bemerkung zu einem Satz von Herrn G. van der Lyn.** *S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen* 71, 349—352 (1939).

Eine Zerlegung  $K = \sum F$  des Kompaktums  $K$  heißt geordnet, wenn für jedes Element  $F$  der Zerlegung die Menge  $K - F$  Summe zweier fremder offener Mengen  $F^+$ ,  $F^-$  ist, von denen höchstens eine leer sein kann, weiter für je zwei verschiedene Zerlegungselemente  $F_1, F_2$  entweder  $F_1^- \subset F_2^-$  mit  $F_1 \subset F_2^-$  oder  $F_2^- \subset F_1^-$  mit  $F_2 \subset F_1^-$  gilt. Verf. beweist, daß jede geordnete Zerlegung eines Kompaktums stetig ist. Aus diesem Satz folgt leicht ein van der Lynscher Satz [*Mathesis* 60, 21—24 (1936)] über gewisse Zerlegungssysteme der abgeschlossenen dreidimensionalen Vollkugel.

*G. Alexits (Budapest).*

**Papakyriakopoulos, Chr.: Über die geschlossenen Jordanschen Kurven im  $R_n$ .** *Bull. Soc. Math. Grece* 19, 97—126 (1939) [Griechisch].

Für  $n$ -dimensionale, lineare, nicht notwendig Euklidische Räume wird ein topologisches Problem behandelt, in welches die Linearität des Raumes in eigentümlicher Weise hineinspielt. Die Hauptidee des Autors kann schon am Beispiel des dreidimensionalen Euklidischen Raumes klargemacht werden. — In einem solchen Raum sei eine geschlossene (nicht notwendig ebene) Jordansche Kurve gegeben. Dann kann man jeder Geraden, welche die Jordansche Kurve nicht trifft, eine Windungszahl zuordnen, welche die Anzahl der Umläufe um diese Achse wiedergibt, die ein Punkt beim Beschreiben der Jordanschen Kurve ausführt. Man beweist, daß diese charakteristische Zahl für zwei Geraden invariant bleibt, die man stetig ineinander überführen kann, ohne die Jordansche Kurve zu treffen. — So werden die Geraden des Raumes in Klassen zerlegt, die der Autor Desmen (*δέσμη*) nennt, deren Anzahl (endlich oder unendlich) und charakteristische Zahl (stets endliche ganze Zahl) bei gewissen Deformationen der Jordanschen Kurve invariant bleiben. Eine gegebene Kurve kann mehrere (evtl. unendlich viele) Desmen vom gleichen Windungstyp besitzen. Die Grenzgeraden einer Desme schneiden immer die Jordansche Kurve und bestimmen auf dieser Kurve Punktmengen, die aber auch für Desmen vom gleichen Windungstyp übereinstimmen

können, wie am Beispiel gezeigt wird. Das Problem, ein volles Invariantensystem, für die Charakterisierung der Desmen zu finden, ist schwieriger, als es den Anschein hat, und bleibt ungelöst. Die Methode, die der Autor anwendet, ist in jeder Einzelheit streng, zweckmäßig und originell.

*C. Carathéodory* (München).

**Dehn, M.: Über Abbildungen.** Mat. Tidsskr. B 1939, 25—48.

Einführender Vortrag über den Gegenstand der in dies. Zbl. 19, 253 besprochenen Arbeit.

*Ullrich* (Gießen).

**Kerékjártó, B. de: Transformations topologiques et groupes continus.** Mat. fiz. Lap. 46, 1—12 u. franz. Zusammenfassung 12 (1939) [Ungarisch].

Bericht über die Theorie der topologischen Transformationen, die zu einer kontinuierlichen Gruppe gehören, und besonders über eigene Resultate des Verf. in dieser Theorie. Die Überschriften der einzelnen Paragraphen charakterisieren genügend den Inhalt: Die topologischen Abbildungen der Ebene. Die Strömung der Flüssigkeiten und der Deformationssatz von Tietze. Stationäre Strömung und eingliedrige kontinuierliche Gruppen. Über die Bahnlinien einer kont. eingliedrigen Gruppe. Die Abbildung der Ebene mit einem Fixpunkte ohne Quadratwurzel. Fixpunktfreie Abbildungen und der Translationssatz von Brouwer. Die topologische Charakterisierung der Translationen der Ebene. Eingliedrige fixpunktfreie Abbildung ohne Quadratwurzel. Die einfachen transitiven kont. Gruppen der Ebene. *Gy. v. Sz. Nagy*.

**Rham, Georges de: Sur un procédé de formation d'invariants intégraux.** Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 49, Abt. 1, 156—161 (1939).

Bericht über einen auf Einladung der Deutschen Mathematikervereinigung auf ihrer Tagung in Baden-Baden am 14.9. 1938 gehaltenen Vortrag. Auf einer  $n$ -dimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit  $E$  sei eine transitive kontinuierliche Liesche Gruppe  $G$  analytischer Transformationen gegeben. Eine Integralinvariante ist ein in  $E$  definiertes  $p$ -faches Integral ( $1 \leq p \leq n$ ), das seinen Wert nicht ändert, wenn man das Integrationsgebiet mittels  $G$  transformiert. Ist das zugehörige Differential eine äußere Differentialform  $\sum A_{i_1 i_2 \dots i_p} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_p}$ , so heißt das Integral von erster Art vom Grade  $p$ . Eine Methode zur Bestimmung aller Integralinvarianten erster Art, welche auf infinitesimalen Transformationen beruht, geht auf E. Cartan [Sur les invariants intégraux de certaines espaces homogènes ... Ann. Soc. Polon. Math. 8, 181—225 (1929)] zurück. In diesem Vortrag wird eine neue Methode zur Aufstellung aller Integralinvarianten angegeben, welche von dem Begriff der Schnitzzahl (Kroneckerscher Index) ausgeht. Sind  $c^p$  und  $c^{n-p}$  zwei Integrationsgebiete,  $x$  ein Element von  $G$ ,  $I(c^p, xc^{n-p})$  die Schnitzzahl von  $c^p$  und  $xc^{n-p}$ , so ist das unter gewissen Zusatzvoraussetzungen existierende Integral

$$\int_G I(c^p, xc^{n-p}) dx = F(c^p, c^{n-p})$$

als Funktion von  $c^p$  eine Integralinvariante erster Art vom Grade  $p$ . Es läßt sich auffassen als mittlerer Wert für die Schnitzzahlen von  $c^p$  mit den  $xc^{n-p}$ . Die Eigenschaften dieser Invarianten und der ihr zugeordneten Differentialformen werden mittels der topologischen Eigenschaften der Schnitzzahlen untersucht. Ferner werden die interessanten Beziehungen zur klassischen Cartanschen Theorie aufgezeigt. — Ersetzt man die Schnitzzahlen durch die arithmetische Zahl der Schnittpunkte, so wird man auf Integralinvarianten zweiter Art geführt und erhält Analogien zum Poincaréschen Theorem der Integralgeometrie.

*Wolfgang Franz* (Gießen).

**Eilenberg, S., et C. Kuratowski: Théorèmes d'addition concernant le groupe des transformations en circonférence.** Fundam. Math. 32, 193—200 (1939).

$X$  étant un espace topologique et  $Y$  un groupe abélien topologique,  $Y^X$  désigne le groupe des transformations continues de  $X$  en sous-ensembles de  $Y$ . Soit  $A_0$  et  $A_1$  deux ensembles fermés tels que  $X = A_0 + A_1$  et désignons par  $A$  un des 4 ensembles  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_0 \cdot A_1$  ou  $A_0 + A_1$ . Soit encore  $\Psi(A)$  le groupe des éléments  $g$  de  $Y^A$  de la forme  $g = f/A$  où  $f$  appartient à un sous-groupe  $\Gamma$  de  $Y^X$  et posons  $\mathfrak{B}(A) = Y^A/\Psi(A)$ .



La note contient des théorèmes d'addition concernant le rapport du groupe  $\mathfrak{B}(A_0 + A_1)$  aux groupes  $\mathfrak{B}(A_0)$ ,  $\mathfrak{B}(A_1)$ ,  $\mathfrak{B}(A_0 \cdot A_1)$ ; théorèmes bien généraux qui correspondent, en certains cas spéciaux, à des théorèmes connus concernant les groupes de Betti.

G. Alexits (Budapest).

Parhomenko, A.: Über eineindeutige stetige Abbildungen. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 197—209 u. deutsch. Zusammenfassung 209—210 (1939) [Russisch].

Verf. beweist zuerst, daß folgendes für die  $H$ -Abgeschlossenheit eines Hausdorffschen Raumes  $X$  hinreicht: Jede eineindeutige stetige Abbildung von  $X$  auf einen Hausdorffschen Raum ist topologisch. Also ist diese Bedingung dafür notwendig und hinreichend, daß ein regulärer Raum  $X$  bikompakt sei. Dann werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt (und dies ist das Hauptziel der Abhandlung), daß ein topologischer Raum auf einen metrischen, symmetrischen (d. h. allgemein metrischen, dessen Metrik dem Identitäts- und dem Symmetrieaxiom genügt), null-dimensionalen Hausdorffschen, nulldimensionalen metrischen separablen oder endlich auf einen nulldimensionalen metrischen kompakten Raum eineindeutig und stetig abgebildet werden kann.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Smith, P. A.: Transformations of finite period. II. Ann. of Math., II. s. 40, 690 bis 711 (1939).

$M$  sei ein bikompakter topologischer Raum von endlicher Dimension, in dem jede offene Menge Summe von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ist.  $T$  sei eine periodische topologische Selbstabbildung von  $M$ , und  $L$  die Menge der Fixpunkte von  $T$ . Es wird untersucht, welche lokalen Eigenschaften von  $M$ , insbesondere Homologieeigenschaften, sich auf  $L$  übertragen. Das ist der Fall mit der Eigenschaft des „lokalen Zusammenhangs in bezug auf Homologie (mod  $p$ )“, wenn die Periode von  $T$  eine Potenz der Primzahl  $p$  ist. Unter derselben Voraussetzung überträgt sich auch eine gewisse Eigenschaft  $PQ$ , deren Definition für dieses Referat zu kompliziert ist, die aber im wesentlichen besagt, daß die lokalen Homologiegruppen (mod  $p$ ) in jedem Punkte eine Basis aus nur einem Element besitzen. Für lokal-euklidische Räume ist  $PQ$  stets erfüllt, ebenso für verallgemeinerte Mannigfaltigkeiten. Hat  $T$  die Periode  $p$  und ist die Bettische Zahl höchster Dimension von  $M$  gleich 1, so sind unter gewissen Voraussetzungen die Bettischen Zahlen höchster Dimension der Komponenten von  $L$  größer oder gleich 1. Ist  $M$  lokal-euklidisch und  $T$  regulär in dem Sinne, daß die Fixpunkt mengen von  $T$  und seinen Potenzen auch lokal-euklidisch sind, so folgt, daß alle Komponenten von  $L$  orientierbar sind. Dieser und der folgende Satz gelten auch dann, wenn die Periode von  $T$  eine beliebige ganze Zahl ist. Ist  $M$  eine euklidische 3-Sphäre und erhält  $T$  die Orientierung, so ist  $L$  leer oder eine Jordankurve; kehrt aber  $T$  die Orientierung um, so ist  $L$  ein Punktepaar oder eine 2-Sphäre. Im letzten Fall hat  $T$  die Periode 2. (Vgl. dies. Zbl. 18, 332.)

van der Waerden (Leipzig).

Ehresmann, Charles: Sur la topologie des groupes simples clos. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1263—1265 (1939).

Applying a previous method of the Author [C. R. Acad. Sci., Paris 208, 321—323 (1939); this Zbl. 20, 168], it is given a subdivision of the manifold  $W_{n+1,p+1}$  of the spaces of dimension  $p$ , which are in the quadric of equation

$$x_0 \bar{x}_0 + \dots + x_n \bar{x}_n - y_0 \bar{y}_0 - \dots - y_p \bar{y}_p = 0$$

in the projective complex space  $P_{n+p+1}$  ( $n \geq p$ ). By means of this subdivision it is possible to calculate the homology and intersection characters of this manifold. — It is observed that  $W_{n+1,p+1}$  is the manifold of  $p+1$  orthogonal unit vectors in the complex  $(n+1)$ -dimensional space; that  $W_{n+1,p+1}$  is the group-manifold of the linear substitutions which leave invariant the Hermite's form  $x_0 \bar{x}_0 + \dots + x_n \bar{x}_n$ ; and that  $W_{n+1,p}$  is the analogous group-manifold of the linear unimodular substitutions. — The Author calculates with the same method the analogous characters of the similar manifold when the quadric is in the projective space of quaternions, and gives an analogous group-theoretical definition of the manifold. Afterwards the same method is applied in the case of a quadric in the real projective space. Achille Bassi (Bologna).



**Puckett jr., W. T.:** Concerning local connectedness under the inverse of certain continuous transformations. Amer. J. Math. 61, 750—756 (1939).

Soit  $B = T(A)$  une transformation continue intérieure (c'est-à-dire conservant la notion d'ensemble ouvert) de l'espace métrique compact  $A$  en  $B$ . Parmi les nombreux résultats obtenus par l'A. je citerai les suivants: I. Si  $B$  est localement connexe, il est nécessaire et suffisant pour que  $A$  le soit, que, pour tout point  $b \in B$ ,  $T^{-1}(b)$  soit localement connexe relativement à  $A$ . [Ceci veut dire que les continus joignant les points de  $T^{-1}(b)$  sont dans  $A$ .] — II. Si  $T$  est, de plus, à valence finie et si  $K$  est un sous ensemble fermé localement connexe de  $B$ ,  $T^{-1}(K)$  est localement connexe. Dans cette dernière propositions chacune des conditions: transformation intérieure et transformation à valence finie, est nécessaire.

S. Stoilow (Bukarest).

**Wallace, A. D.:** Some characterizations of interior transformations. Amer. J. Math. 61, 757—763 (1939).

L'A. montre que chacune des conditions suivantes est équivalente à ce que  $B = T(A)$  est transformation intérieure: 1. Pour toute suite d'ensembles  $Y_n$  de  $B$  convergeant vers  $Y \subset B$  on a  $\lim T^{-1}(Y_n) = T^{-1}(Y)$ , 2. Pour tout  $Y \subset B$  on a  $T^{-1}(\overline{Y}) = \overline{T^{-1}(Y)}$  et 3. Pour tout  $X \subset A$  on a  $T(X^0) \subset T(X)^0$  (où  $H^0$  désigne l'intérieur de  $H$ ). — Un ensemble  $X \subset A$  est dit normal si  $T(F(x)) \subset F(T(x))$ , où  $F(H)$  désigne la frontière de  $H$ . La transformation  $T$  est dite normale au point  $p$  s'il existe un voisinage normal de  $p$  dans tout voisinage de  $p$ . L'A. établit, sur les ensembles normaux et les transformations intérieures normales, plusieurs propositions intéressantes qui généralisent des résultats de S. Stoilow (dies. Zbl. 4, 260) et de G. T. Whyburn (dies. Zbl. 16, 421).

S. Stoilow (Bukarest).

**Sakata, Ryoji:** Sur un problème concernant les transformations des polyèdres en surfaces sphériques. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 69—70 (1939).

Verf. wird einen von M. A. Komatu gefundenen Erweiterungssatz zur Veröffentlichung bringen, aus dem, wie er hier im voraus zeigt, die bejahende Antwort auf eine Frage von Borsuk folgt: „Ist ein Polyeder, das keine wesentliche stetige Abbildung in irgendeine Sphäre ermöglicht, in jeder Dimension azyklisch?“ (Umkehrung des Satzes von Borsuk, dies. Zbl. 16, 139.)

R. Furch (Rostock).

**Reidemeister, Kurt:** Durchschnitt und Schnitt von Homotopieketten. Mh. Math. Phys. 48, 226—239 (1939).

Die Begriffe der Schnittkette, der Schnitzzahl und der Verschlingungszahl für Homotopieketten  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}$  werden hier auf den Fall der Homotopieketten (vgl. dies. Zbl. 12, 126) verallgemeinert. Um zu diesen neuartigen Begriffsbildungen zu gelangen, erweist es sich als notwendig, eine zur Fundamentalgruppe  $\mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{M}$  isomorphe Gruppe  $\mathfrak{H}$  und das direkte Produkt  $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$  von beiden als algebraisches Hilfsmittel heranzuziehen. Dann läßt sich der Schnitt  $\sigma$  zweier Homotopieketten als eine gewisse verallgemeinerte Kette mit Elementen des Gruppenringes von  $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$  als Koeffizienten erklären. Aus dem Schnitt  $\sigma$  läßt sich ein weiterer, abgeschwächter Prozeß, der Durchschnitt  $\tau$  zweier Homotopieketten ableiten, welcher eine Kette mit Gruppenringelementen von  $\mathfrak{H}$  als Koeffizienten ist. Die Operationen  $\sigma$  und  $\tau$  genügen den distributiven Gesetzen und zeigen bei der Randbildung das gewohnte Verhalten. Sie befolgen einfache Gesetze in bezug auf den Operatorbereich  $\mathfrak{G}$  und können berechnet werden, wenn sie für die Zellen eines Fundamentalbereiches der universellen Überlagerung bekannt sind. Schnitt und Durchschnitt geschlossener Ketten sind geschlossen; ist die eine dieser beiden Ketten sogar berandend, so ist auch der Schnitt berandend. Durchschnitt und Schnitt sind also Operationen, welche eindeutig auf die Klassen geschlossener Ketten angewandt werden können. — Von besonderer Bedeutung werden diese Begriffe, wenn sie innerhalb der Rechtsideale  $\mathfrak{U}$  oder modulo der Rechtsideale  $\mathfrak{U}$  des Gruppenringes von  $\mathfrak{G}$  gebildet werden. Die genannten Gesetzmäßigkeiten bleiben dann bei sinngemäßer Auffassung erhalten. Ist die Dimension des Durchschnitts Null, so heißt die Summe der Koeffizienten der ent-



sprechenden nulldimensionalen Kette die zugehörige Schnitzzahl. Sie ist also ein Element des Gruppenringes von  $\mathfrak{S}$ . — Unter der weiteren Voraussetzung, daß jede geschlossene Homotopiekette von  $\mathfrak{M}$  der Dimension  $d$  mit  $0 < d < n$  berandend ist, d. h. also, daß die Homologiegruppen dieser Dimensionen der universellen Überlagerung sämtlich verschwinden, ergibt sich die Möglichkeit, verallgemeinerte Verschlingungszahlen zwischen je zwei Klassen geschlossener Ketten in bezug auf verschiedene Rechtsideale zu erklären. — In diesen Begriffsbildungen sind sowohl die gewöhnlichen Schnitt- und Verschlingungszahlen als auch die Schnittklassensysteme für Kurvensysteme auf Flächen als Spezialfälle enthalten. *Wolfgang Franz* (Gießen).

**Borsuk, Karol:** Sur les coupures locales des variétés. *Fundam. Math.* **32**, 288—293 (1939).

Es sei  $X$  eine abgeschlossene Untermenge der euklidischen  $n$ -dimensionalen Sphäre  $S_n$  ( $n > 1$ ).  $X$  heißt ein lokaler Schnitt im Punkt  $x_0$ , wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt derart, daß jede in  $U$  enthaltene Umgebung  $V$  von  $x_0$  durch  $X$  zerlegt wird, daß m. a. W. die Punktmenge  $V - X$  nicht zusammenhängend ist. Notwendig und hinreichend hierfür ist: es gibt eine Umgebung  $G$  von  $x_0$  derart, daß für jede in  $G$  enthaltene Umgebung  $H$  und einen gewissen Raum  $X^*$  eine wesentliche Abbildung von  $X^*$  auf  $S_{n-1}$  existiert, welche in  $X^* - H$  nicht mehr wesentlich ist.  $X^*$  ist der Raum, welcher aus  $X$  entsteht, indem die Punkte von  $X - G$  in einen Punkt zusammengezogen werden. (Vgl. dies. Zbl. **4**, 73.) *K. Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

**Borsuk, Karol:** Remarque sur l'addition des éléments. *Rev. Ci., Lima* **41**, Nr 427, 105—112 (1939).

Als eine sphärische Fläche  $S^{(n-1)}$  sei das topologische Bild der  $(n-1)$ -dimensionalen Oberfläche einer  $n$ -dimensionalen euklidischen Vollkugel  $K^{(n)}$  bezeichnet; als Element  $Q^{(n)}$  das topologische Bild einer  $K^{(n)}$ . Die Lage eines Elementes  $Q^{(n)} \subset S^{(n)}$  heißt regulär in  $S^{(n)}$ , wenn  $S^{(n)} - Q^{(n)}$  ebenfalls ein Element ist. Verf. zeigt: Es seien  $Q_0^{(n)}$  und  $Q_1^{(n)}$  zwei  $n$ -dimensionale Elemente mit den Begrenzungen  $S_0^{(n-1)}$  und  $S_1^{(n-1)}$ ; wenn  $Q_0^{(n)} \cdot Q_1^{(n)} = S_0^{(n-1)} \cdot S_1^{(n-1)}$  ist und diese Menge ein  $(n-1)$ -dimensionales Element von regulärer Lage in  $S_1^{(n-1)}$  ist, so ist die Summe  $Q_0^{(n)} + Q_1^{(n)}$  ein Element. *Nöbeling*.

**Kodaira, Kunihiko:** Eine Bemerkung zur Dimensionstheorie. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **15**, 174—176 (1939).

Es sei  $F$  ein metrischer kompakter Raum. Mit  $\dim F$  möge die Lebesgue-Brouwersche Dimension von  $F$  bezeichnet werden. Verf. teilt einen einfachen Beweis für die bekannte Tatsache mit, daß  $\dim F$ , falls endlich, mit der Urysohn-Mengerschen Dimension von  $F$  übereinstimmt. Es gilt nämlich  $\dim F \leq n$  dann und nur dann, wenn jeder Punkt von  $F$  beliebig kleine Umgebungen  $U$  mit  $\dim(\bar{U} - U) < n$  besitzt.

*Bedřich Pospíšil* (Brünn).

**Wallace, A. D.:** On non-boundary sets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **45**, 420—422 (1939).

Es sei  $R$  ein topologischer Raum im Sinne von Kuratowski. Eine Menge  $M$  heißt dicht, wenn die abgeschlossene Hülle von  $M$  gleich  $R$  ist;  $M$  heißt Begrenzung, wenn ihr Komplement in  $R$  dicht ist;  $M$  heißt nicht-dicht (= nirgends dicht), wenn ihre abgeschlossene Hülle Begrenzung ist. Dieser Trilogie fügt Verf. den Begriff der Nicht-Begrenzungen hinzu: das sind Mengen, deren Komplemente nicht-dicht sind. Es werden einige formale Beziehungen zwischen den vier Begriffen untersucht und einige Eigenschaften des neuen Begriffes bewiesen. *Nöbeling* (Erlangen).

**Kelley, J. L.:** A metric connected with property S. *Amer. J. Math.* **61**, 764—768 (1939).

Un espace distancié jouit de la propriété S, s'il se laisse décomposer, pour tout  $\varepsilon > 0$ , en un nombre fini d'ensembles connexes chacun ayant un diamètre  $< \varepsilon$ . L'auteur démontre que, dans un espace distancié connexe jouissant de la propriété S, la distance se laisse définir de sorte que les sphéroïdes de l'espace remétrisé soient connexes et jouissent de la propriété S. *G. Alexits* (Budapest).